POLSKIE TOWARZYSTWO SEMIOTYCZNE

STUDIA SEMIOTYCZNE

Tom XXXII • Numer 2 • 2018

studiasemiotyczne.pts.edu.pl

„Studia Semiotyczne" powstały w 1970 r. z inicjatywy prof. Jerzego Pelca i były przez niego wydawane do 2015 r. jako czasopismo nieperiodyczne. Od 2016 r. czasopismo ukazuje się równolegle w druku i w Internecie jako półrocznik. W „Studiach Semiotycznych" są publikowane artykuły z pogranicza filozofii i semiotyki, w szczególności z zakresu: filozofii języka, ogólnej teorii znaku, zastosowań metod semantycznych w filozofii, filozoficznych aspektów lingwistyki, psycholingwistyki i kognitywistyki, semiotycznych aspektów filozofii umysłu, filozoficznych konsekwencji metalogiki, metamatematyki i teorii języków formalnych, analizy języka filozofii i argumentacji filozoficznej oraz historii idei semiotycznych i logicznych. Wydawcą „Studiów Semiotycznych" jest Polskie Towarzystwo Semiotyczne. Zasady składania tekstów do Redakcji, prawne i etyczne aspekty publikacji oraz procedura recenzyjna stosowana przez Redakcję są szczegółowo opisane w zakładce „Do Autorów" na stronie:

http://studiasemiotyczne.pts.edu.pl

Studia Semiotyczne (*Semiotic Studies*) is a journal founded in 1970 by Jerzy Pelc, who was its Editor-in-Chief up until 2015. Between 1970 and 2015 *Studia Semiotyczne* was published non-periodically. In December 2015 *Studia Semiotyczne* was formally transformed into a six-monthly published simultaneously in print and on the Internet. The journal publishes papers that fall on the borderline between philosophy and semiotics and in particular, in the fields of philosophy of language, general theory of signs, applications of semantic methods in philosophy, philosophical aspects of linguistics, psycholinguistics and computer science, semiotic aspects of philosophy of mind, philosophical consequences of metalogic, metamathematics and the theory of formal languages, analysis of the language of philosophy and the philosophical argumentation, and history of ideas in semiotics and logic. *Studia Semiotyczne* is published by Polskie Towarzystwo Semiotyczne (The Polish Semiotic Society). The guidelines for submitting manuscripts to the Editors, the legal and ethical aspects of the publication, and the review procedure used by the Editors are described in detail in the "For Authors" section of the website:

http://studiasemiotyczne.pts.edu.pl

POLSKIE TOWARZYSTWO SEMIOTYCZNE

STUDIA SEMIOTYCZNE

Tom XXXII • nr 2

PÓŁROCZNIK

PRAWDA, ODNIESIENIE I ROZSTRZYGALNOŚĆ W MATEMATYCE

WARSZAWA • 2018

Skład elektroniczny:
Pracownia Wydawnicza, Zalesie Górne

Adres redakcji:
Krakowskie Przedmieście 3, 00-047 Warszawa
e-mail: studiasemiotyczne@pts.edu.pl
http://studiasemiotyczne.pts.edu.pl/

ISSN 0137-6608; e-ISSN 2544-073X

Publikacja została sfinansowana ze środków na badania statutowe Uniwersytetu Warszawskiego.
Prace redakcyjne związane z przygotowaniem składu elektronicznego, korektą językową i zamieszczaniem artykułów naukowych na stronach internetowych „Studiów Semiotycznych” i „Studiów Semiotycznych – English Supplement” zostały sfinansowane ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych na działalność upowszechniającą naukę w ramach umowy 803/P-DUN/2018

SPIS TREŚCI

CONTENT

Studia Semiotyczne, t. XXXII, nr 2 (2018), s. 5–8
ISSN 0137-6608, e-ISSN 2544-073X
DOI: 10.26333/sts.xxxii2.01
Od Redakcji

Andrzej Biłat*

OD REDAKTORA NUMERU

Niniejszy numer „Studiów Semiotycznych" jest w całości poświęcony filozoficznej problematyce podstaw matematyki. Podjęte tematy dotyczą w szczególności kwestii natury przedmiotowego odniesienia terminów matematycznych, prawdy matematycznej i rozstrzygalności problemów matematycznych. Punktem odniesienia zdecydowanej większości rozpraw i esejów są znane twierdzenia limitacyjne Kurta Gödla.

Numer otwiera polski przekład wykładu Gödla pt. „Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and their Implications" („O pewnych zasadniczych twierdzeniach dotyczących podstaw matematyki i wnioskach z nich płynących"). Wygłoszony w 1951 r. w cyklu wykładów im. J. W. Gibbsa, składa się zasadniczo z dwóch części. W pierwszej Gödel objaśnia matematyczny sens i kontekst obu swoich słynnych twierdzeń. W drugiej – stosuje je w argumentacji za tezą matematycznego platonizmu. Argumentacja ta wciąż stanowi wzorcowy przykład analizy filozoficznych konsekwencji twierdzeń metamatematycznych. Czytelnik z pewnością doceni też językowe walory przekładu Marcina Poręby. O ile nam wiadomo, jest to pierwszy polski przekład tego klasycznego tekstu dwudziestowiecznej filozofii matematyki.

W artykule „Phenomenological Ideas in the Philosophy of Mathematics. From Husserl to Gödel" Thomas Bedürftig i Roman Murawski śledzą mało znane wpływy idei fenomenologicznych na rozwój dwu-

* Politechnika Warszawska, Wydział Administracji i Nauk Społecznych, e-mail: a.bilat@ans.pw.edu.pl. ORCID: 0000-0003-1884-1361.

dziestowiecznej filozofii matematyki. Dotyczy to w szczególności koncepcji intuicji ejdetycznej (*Anschauung*) jako sposobu rozstrzygania zdań matematycznych. W artykule omówiona została wczesna filozofia matematyki Edmunda Husserla (jeszcze z okresu jego monografii habilitacyjnej *Philosophie der Arithmetik*), fenomenologiczna filozofia matematyki Hermanna Weyla, Oskara Beckera oraz filozofia matematyki Gödla. Autorzy zwracają uwagę, że fenomenologiczne podejście jest wciąż żywe w filozofii matematyki, jednakże najczęściej wyraża się ono nie w bezpośrednich nawiązaniach do prac Husserla, ale do rozważań Gödla (zwłaszcza tych, w których rozwija on swoją koncepcję intuicji matematycznej).

W artykule „Gottlob Frege o prawdzie w okresie wydawania dwóch tomów *Grundgesetze der Arithmetik* (1893–1903)" Gabriela Besler zbiera, systematyzuje i analizuje istotne użycia terminów „prawda" (*Das Wahre*), „prawdziwość" (*Wahrheit*), „prawdziwy" (*wahr*) oraz innych, związanych z nimi kluczowych słów używanych w tekstach Fregego. Praca jest rezultatem skrupulatnej i źródłowej analizy historycznej, obejmującej nie tylko *Grundgesetze*..., ale też pozostałe pisma Fregego z lat 1893–1903 (włącznie z pośmiertnie wydanymi listami i niedokończonym podręcznikiem logiki). Dzięki uwzględnieniu tak bogatego materiału historycznego Czytelnik znajdzie w artykule niezbędne dane umożliwiające pełną rekonstrukcję koncepcji prawdy Fregego ze szczytowego okresu rozwoju jego logicyzmu.

Stanisław Krajewski w artykule „On Suprasubjective Existence in Mathematics" zwraca uwagę na pewną charakterystyczną rozbieżność podejść matematyków w filozoficznej kwestii obiektywności prawd matematycznych. W swojej praktyce badawczej zwykle zakładają oni platoński obiektywizm, natomiast w wyraźnych deklaracjach – antyrealistyczny formalizm („mathematicians are Platonists on weekdays and formalists on weekends"). Filozoficzne wyjaśnienie tego faktu, zaproponowane w artykule, umożliwia akceptację obu podejść. Autor przedstawia koncepcję określoną przez niego mianem *suprasubiektywizmu*, która była wcześniej niewyraźnie sugerowana w filozofii matematyki (m.in. przez samego Gödla). Jest ona wzmocnieniem intersubiektywizmu głoszącym, iż prawdy matematyczne: a) są obiektywne (nie są więc swobodnymi konstrukcjami ludzkiego umysłu, tak jak np. poprawny opis tęczy nie jest taką konstrukcją), a pomimo to b) nie odnoszą się do obiektów, a opisywane przez nie fakty są w pewien sposób zależne od poznającego je umysłu (podobnie jak zjawisko tęczy jest zależne od obserwatora).

Michał Heller w artykule „Syntax-Semantics Interaction in Mathematics" wykorzystuje narzędzia teorii kategorii w opisie relacji między syntaktyczną i semantyczną strukturą teorii matematycznych. W tym celu wskazuje na użyteczność dwóch funktorów, Lang i Syn, w analizie owych teorii (traktowanych przez Autora jako systemy twierdzeń o kategoriach i funktorach). Autor dokonuje naturalnego rozszerzenia teorio-kategorialnego ujęcia matematyki pochodzącego od Johna Bella (z lat 80. XX w.). W tak rozszerzonym ujęciu dobrze widoczny staje się fakt, że ograniczenia związane z twierdzeniami Gödla mają charakter lokalny (dotyczący jedynie teorii zawierających elementarną arytmetykę). Otwiera się też interesująca perspektywa metodologicznej analizy teorii fizycznej, umożliwiająca przezwyciężenie tradycyjnej – zbyt ostrej, zdaniem Autora – opozycji między syntaktycznym i semantycznym opisem teorii.

Artykuł Krzysztofa Wójtowicza „Kategoria wyjaśniania w filozofii matematyki Kurta Gödla" dotyczy kwestii stosowalności kategorii wyjaśnienia w interpretacji filozofii matematyki Gödla. Według Autora Gödel zakładał, że każdy dobrze postawiony problem matematyczny jest rozwiązywalny oraz że ów fakt domaga się wyjaśnienia. Jednocześnie rozumiał „rozwiązanie problemu matematycznego" znacznie szerzej niż „podanie matematycznego dowodu"; chodziło mu raczej o znalezienie wiarygodnych aksjomatów prowadzących do rozwiązania problemu. Zgodnie z tą interpretacją, w koncepcji Gödla dwie zasady umożliwiają wyjaśnienie tego podstawowego faktu: zasada realizmu metafizycznego (głosząca, że istnieje niezależne od nas uniwersum matematyczne) i zasada optymizmu epistemologicznego (zgodnie z którą jesteśmy w stanie uzyskać wgląd w to uniwersum). Autor szczegółowo analizuje postawiony przez siebie problem na przykładzie hipotezy kontinuum.

Paweł Stacewicz w artykule „Liczby nieobliczalne a granice kodowania w matematyce" zwraca uwagę na okoliczność, że arytmetyzacja danych i programów komputerowych znacznie ułatwia – lub wręcz umożliwia – określenie poznawczych granic różnego typu obliczeń. W szczególności uwzględnienie faktu istnienia liczb nieobliczalnych prowadzi do interesujących wniosków. Z jednej strony bowiem fakt ten wskazuje na zasadnicze ograniczenia (związane z tezą

Churcha-Turinga) obliczeń dyskretnych, a z drugiej strony – sugeruje potrzebę rozszerzenia standardowego podejścia w kierunku badań nad rozwojem obliczeń silniejszych, takich jak obliczenia analogowe (niecyfrowe, ciągłe). Rezultatem analiz Autora jest teza, że każda poprawna koncepcja takich silniejszych obliczeń musi zakładać istnienie wielkości aktualnie nieskończonych, które możemy rejestrować, przetwarzać i opisywać. Za ich istnieniem przemawiają pewne argumenty fizyki teoretycznej, choć nie są one ostateczne.

Numer zamyka esej Witolda Marciszewskiego „Does Science Progress towards Ever Higher Solvability through Feedbacks between Insights and Routines?" będący obszernym wprowadzeniem do dyskusji. Autor przedstawia pewien argument za jedną z odpowiedzi na postawione w tytule pytanie. Otóż z twierdzenia Gödla wynika, że na każdym etapie rozwoju dostatecznie bogatej teorii aksjomatycznej w jej obrębie muszą pojawić się algorytmicznie („rutynowo") nierozwiązywalne problemy. Jednakże dzięki badaniom, w których istotną rolę odgrywa intuicja, zwykle zostają one rozwiązane, a uzyskane rozwiązania zostają dołączone do wcześniejszej teorii w postaci dodatkowych aksjomatów lub reguł. Dzięki temu rozszerzeniu powstaje nowa teoria będąca podstawą silniejszych algorytmów i generująca nowe intuicje. Te intuicje umożliwiają kolejne aksjomatyczne wzmocnienie teorii i tak dalej. W ten sposób wiedza naukowa wchodzi na coraz wyższe poziomy rozwiązywalności problemów poznawczych. Według Autora niektóre fakty z zakresu historii matematyki zdają się potwierdzać ten schemat. Czy rzeczywiście – a jeśli tak, to w jakim zakresie – można ów „Gödlowski" schemat skutecznie zastosować w opisie rozwoju wiedzy naukowej? Autor pozostawia to pytanie otwarte, zachęcając nas do dyskusji.

* * *

This issue of „Semiotic Studies" is devoted to the philosophical questions of the reference of mathematical terms, the nature of mathematical truths and their decidability. The points of reference for the vast majority of the articles are Gödel's limitation theorems.

I would like to thank the authors for their valuable contributions to the issue and the reviewers for their insightful and useful comments. My special thanks go to the Institute of Philosophy of the University of Warsaw, without which the issue would not have been possible.

Studia Semiotyczne, t. XXXII, nr 2 (2018), s. 9–32
ISSN 0137-6608, e-ISSN 2544-073X
DOI: 10.26333/sts.xxxii2.02
Przekład

Kurt Gödel*

O PEWNYCH ZASADNICZNYCH TWIERDZENIACH DOTYCZĄCYCH PODSTAW MATEMATYKI I WNIOSKACH Z NICH PŁYNĄCYCH**

Badania nad podstawami matematyki przyniosły w ostatnich dziesięcioleciach wyniki, które wydają mi się ciekawe nie tylko dla nich samych, lecz także z uwagi na wnioski, jakie płyną z nich w odniesieniu do tradycyjnych problemów filozoficznych dotyczących natury matematyki. Same wyniki są dość szeroko znane, mimo to jednak sądzę, że warto raz jeszcze przedstawić je w zarysie, zwłaszcza w obliczu faktu, że dzięki pracy szeregu matematyków zyskały one znacznie doskonalszą formę, niż miały pierwotnie. Największy postęp, mający decydujące znaczenie dla tych wyników, stał się możliwy dzięki precyzyjnemu

** Artykuł jest przekładem pracy Gödel (1995). Jest to tekst wykładu wygłoszonego przez Gödla pt. *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their philosophical implications* 26 grudnia 1951 r. na Uniwersytecie Browna w Providence w stanie Rhode Island. Wykład miał miejsce w ramach cyklu wykładów Josiah Willard Gibbs Lectures, organizowanych przez Amerykańskie Towarzystwo Matematyczne dorocznie na różnych uniwersytetach amerykańskich począwszy od 1924 r. Ich zasadniczym celem jest przedstawienie wkładu, jaki współczesna matematyka wnosi do ludzkiego rozumienia świata. Wśród osób zaproszonych do wygłoszenia wykładów im. Gibbsa znaleźli się prócz Gödla m.in. G.H. Hardy, A. Einstein, J. von Neumann, S. Chandrasekhar, H. Weyl, N. Wiener, C.E. Shannon, E.P. Wigner, H.A. Simon, S. Weinberg, E. Witten, R. Penrose [przyp. tłumacza].

zdefiniowaniu pojęcia skończonej procedury[1]. Definicję taką można uzyskać na różne sposoby, które w efekcie dają dokładnie to samo pojęcie. Najbardziej zadowalający sposób polega moim zdaniem na sprowadzeniu pojęcia skończonej procedury do pojęcia maszyny o skończonej liczbie części, co uczynił brytyjski matematyk Turing. Co do filozoficznych konsekwencji wspomnianych wyników, nie sądzę, by kiedykolwiek należycie je przedyskutowano, czy choćby zwrócono na nie uwagę.

Wyniki metamatematyczne, które mam na myśli, skupiają się wokół jednego, podstawowego faktu. Można wręcz powiedzieć, że stanowią jedynie różne jego aspekty. Fakt ten można by określić jako zasadniczą niezupełność (*incompletability*) lub niewyczerpalność (*inexhaustibility*) matematyki. W najprostszej formie napotykamy go wtedy, gdy metodę aksjomatyczną stosujemy nie do jakiegoś systemu hipotetyczno-dedukcyjnego w rodzaju geometrii (gdzie matematyk może głosić jedynie warunkową prawdziwość twierdzeń), lecz do matematyki właściwej, tj. do tych wszystkich zdań matematycznych, które są prawdziwe w sensie absolutnym, bez żadnych dodatkowych założeń. Zdania tego rodzaju muszą istnieć, inaczej bowiem nie mogłyby również istnieć żadne twierdzenia hipotetyczne. Np. *pewne* implikacje o postaci *jeżeli przyjąć takie a takie aksjomaty, to prawdziwe jest takie a takie twierdzenie* koniecznie muszą być prawdziwe w sensie absolutnym. Taki sam charakter ma też niewątpliwie dowolne twierdzenie finitystycznej teorii liczb, np. 2 + 2 = 4. Oczywiście zadanie zaksjomatyzowania matematyki właściwej odbiega od zwykłego rozumienia aksjomatyki. W pierwszym przypadku bowiem aksjomaty nie są dowolne, lecz muszą stanowić trafne zdania matematyczne, w dodatku oczywiste bez dowodu. Nie sposób uniknąć konieczności przyjmowania pewnych aksjomatów lub reguł wnioskowania jako oczywistych bez dowodu, dowody muszą bowiem mieć jakiś początek. Istnieją jednak bardzo różne poglądy na zakres tego, co określiłem jako matematykę właściwą. Np. intuicjoniści i finityści odrzucają niektóre z jej aksjomatów i pojęć, uznawane przez innych, np. zasadę wyłączonego środka czy ogólne pojęcie zbioru.

[1] Pojęcie to, na użytek zastosowań rozważanych w tym wykładzie, jest równoważne pojęciu „obliczalnej funkcji liczb całkowitych" (tj. takiej, której definicja faktycznie umożliwia obliczenie $f(n)$ dla każdej liczby całkowitej n). Procedury, które będą tu rozważane, operują nie na liczbach całkowitych, lecz na formułach, jednak z uwagi na numerację wchodzących w grę formuł można je zawsze sprowadzić do procedur operujących na liczbach całkowitych.

Jednak zjawisko niewyczerpalności matematyki[2] zawsze daje o sobie znać w tej czy innej formie, bez względu na to jakie stanowisko zajmujemy. Wystarczy zatem jeśli objaśnię je na przykładzie najprostszego i najbardziej naturalnego stanowiska, które przyjmuje matematykę taką jaka jest, nie okrawając jej w żaden sposób. Z tego punktu widzenia matematyka jest sprowadzalna do abstrakcyjnej teorii mnogości. Np. powiedzenie, że aksjomaty geometrii rzutowej pociągają za sobą pewne twierdzenie, znaczy, że jeżeli pewien zbiór M elementów zwanych punktami oraz pewien zbiór N podzbiorów zbioru M, zwanych liniami prostymi, spełniają te aksjomaty, to rozważane twierdzenie zachodzi dla M i N. By przytoczyć inny przykład: twierdzenia teorii liczb można interpretować jako mówiące o zbiorach skończonych. Zasadniczym problemem jest tu więc aksjomatyzacja teorii mnogości. Otóż gdy zajmujemy się tym problemem, wynik okazuje się zupełnie różny od tego, czego można by oczekiwać. Zamiast, jak w geometrii, otrzymać skończoną liczbę aksjomatów, stajemy w obliczu nieskończonego szeregu aksjomatów, który można dowolnie wydłużać bez perspektywy końca i najprawdopodobniej bez możliwości zebrania wszystkich tych aksjomatów w jakiejś skończonej regule ich wytwarzania[3]. Dzieje się tak dlatego, że jeśli chcemy uniknąć paradoksów teorii mnogości, bez wprowadzania elementów całkowicie obcych w stosunku do faktycznego postępowania matematycznego, to pojęcie zbioru musi być aksjomatyzowane krok po kroku[4]. Jeżeli np. zaczynamy od liczb całkowitych, tj. szczególnego rodzaju zbiorów skończonych, to najpierw mamy zbiory liczb całkowitych i odnoszące się do nich aksjomaty (aksjomaty pierwszego poziomu), następnie zbiory zbiorów liczb całkowitych z odpowiednimi aksjomatami (aksjomatami drugiego poziomu) i tak dalej, dla dowolnej skończonej iteracji opera-

[2] Przez „matematykę" tu i w dalszym ciągu należy rozumieć „matematykę właściwą" (która oczywiście zawiera logikę formalną w tej mierze, w jakiej ta uchodzi za trafną z punktu widzenia danego stanowiska).

[3] W aksjomatykach dziedzin pozamatematycznych, jak np. geometria fizyczna, zakłada się matematykę właściwą; aksjomatyzacja dotyczy natomiast treści danej dyscypliny tylko w tej mierze, w jakiej wykracza ona poza matematykę właściwą. Treść ta, przynajmniej w dotychczas napotkanych przypadkach, daje się wyrazić w skończonej liczbie aksjomatów.

[4] Okoliczność ta nie jest od razu widoczna przy zwykłym sposobie przedstawiania aksjomatów, jednak wychodzi na jaw, gdy bliżej zastanawiamy się nad ich znaczeniem.

cji „zbiór"[5]. Następnie mamy zbiór wszystkich tych zbiorów skończonego rzędu. Ale zbiór ten możemy znów potraktować w dokładnie taki sam sposób, w jaki przedtem potraktowaliśmy zbiór liczb całkowitych, tzn. możemy rozważać jego podzbiory (tj. zbiory rzędu ω) i formułować aksjomaty dotyczące ich istnienia. Postępowanie to można oczywiście rozszerzyć poza ω, dochodząc do dowolnej pozaskończonej liczby porządkowej. Jako kolejnego aksjomatu można więc zażądać tego, by iteracja tego postępowania było możliwa dla *dowolnej* liczby porządkowej, tj. dla każdego typu porządkowego należącego do jakiegoś zbioru dobrze uporządkowanego. Ale czy w ten sposób dochodzimy do końca? Bynajmniej. Mamy teraz bowiem nową operację tworzenia zbiorów, a mianowicie budowanie zbioru z pewnego wyjściowego zbioru A i pewnego dobrze uporządkowanego zbioru B przez zastosowanie do A operacji „zbiór" tyle razy, na ile wskazuje dobrze uporządkowany zbiór B[6]. A utożsamiając B z pewnym dobrym porządkiem w zbiorze A, możemy powtarzać tę nową operację w pozaskończoność. To z kolei da początek nowej operacji, którą możemy potraktować w taki sam sposób itd. Kolejny krok będzie więc polegał na przyjęciu, iż k a ż d ą operację wytwarzającą zbiory ze zbiorów można powtarzać dla dowolnej liczby porządkowej (tj. typu porządkowego zbioru dobrze uporządkowanego). Ale czy to już koniec? Nie, gdyż możemy przyjąć nie tylko, że opisane przed chwilą postępowanie można zastosować do dowolnej operacji, lecz nadto że powinien istnieć zbiór domknięty ze względu na nie, tj. posiadający taką własność, że jeśli postępowanie to (z dowolną operacją) zastosujemy do elementów tego zbioru, w wyniku otrzymamy również elementy tego zbioru. Zapewne domyślają się już państwo, że wciąż nie doszliśmy do końca, nie może bowiem mieć końca t a k a procedura tworzenia aksjomatów, gdyż samo doprowadzenie jej do pewnego etapu prowadzi do kolejnego aksjomatu. To prawda, że we współczesnej matematyce nigdy w praktyce nie korzysta się z najwyższych szczebli tej hierarchii. Bez obaw można powie-

[5] Operacja „zbiór" jest w istocie tożsama z operacją „zbiór potęgowy", gdzie zbiór potęgowy zbioru M jest to na mocy definicji zbiór wszystkich podzbiorów M.

[6] W celu wykonania iteracji można przyjąć, że $A = B$ i założyć, że dla każdego zbioru wskazano pewien dobry porządek. Dla liczb porządkowych drugiego rodzaju [[granicznych liczb porządkowych]] zawsze można utworzyć zbiór wszystkich zbiorów wcześniej otrzymanych [podwójne nawiasy kwadratowe oznaczają uzupełnienia redaktorów *Kurt Gödel: Collected Works* – przyp. red.].

dzieć, że 99,9% dzisiejszej matematyki zamyka się w trzech pierwszych szczeblach. W praktyce zatem całość matematyki można sprowadzić do skończonej liczby aksjomatów. Stanowi to jednak przygodną okoliczność historyczną, bez znaczenia dla rozważań dotyczących zasad. Poza tym nie jest rzeczą całkowicie nieprawdopodobną, że ta właściwość dzisiejszej matematyki może mieć coś wspólnego z inną jej cechą, a mianowicie niezdolnością do udowodnienia, pomimo wieloletnich wysiłków, pewnych fundamentalnych twierdzeń, takich jak np. hipoteza Riemanna. Można bowiem pokazać, że aksjomaty dla zbiorów wyższych poziomów są istotne nie tylko dla tych zbiorów, lecz mają konsekwencje nawet dla zbiorów poziomu 0, tj. dla teorii liczb całkowitych. Ściślej mówiąc, każdy z tych aksjomatów teorii mnogości pociąga za sobą rozwiązanie pewnych problemów diofantycznych, które były nierozstrzygalne na podstawie dotychczasowych aksjomatów[7]. Problemy diofantyczne, o które tu chodzi, są następującego typu: Niech $P(x_1,..., x_n, y_1,..., y_m)$ będzie wielomianem o danych współczynnikach całkowitych i $n + m$ zmiennych $x_1,..., x_n, y_1,..., y_m$. Zmienne x_i potraktujmy jako niewiadome, a zmienne y_i jako parametry. Mamy wówczas następujący problem: czy równanie $P = 0$ ma rozwiązania całkowite dla dowolnych całkowitych wartości parametrów, czy też dla pewnych całkowitych wartości parametrów równanie to nie ma rozwiązań całkowitych? Każdemu z aksjomatów teorii mnogości można przyporządkować pewien wielomian P, dla którego sformułowany przed chwilą problem staje się rozstrzygalny na mocy tego aksjomatu. Można nawet osiągnąć to, że rząd wielomianu P nie będzie nigdy wyższy niż 4. Dzisiejsza matematyka nie umie jeszcze wykorzystywać aksjomatów teoriomnogościowych do rozwiązywania problemów teorii liczb, jedyny wyjątek stanowią aksjomaty pierwszego poziomu. Faktycznie używa się ich w analitycznej teorii liczb. Można jednak dowieść, że nie wystarczą

[7] Jeżeli twierdzenie to ma zachowywać ważność także dla stanowiska intuicjonistycznego lub finitystycznego, trzeba założyć niesprzeczność aksjomatów teorii mnogości. Niesprzeczność ta jest czymś oczywistym (można jej więc nie zakładać), jeżeli teorię mnogości uznajemy za matematykę właściwą. Podobne twierdzenie zachodzi jednak również dla matematyki finitystycznej, przy tym bez problematycznego założenia niesprzeczności; mianowicie wprowadzanie funkcji rekurencyjnych coraz wyższych rzędów prowadzi do rozwiązania coraz większej liczby określonego rodzaju problemów z zakresu teorii liczb. W matematyce intuicjonistycznej bez wątpienia zachodzi podobne twierdzenie dotyczące wprowadzania (przez nowe aksjomaty) coraz większych liczb porządkowych należących do drugiej klasy liczb.

one do objęcia całej teorii liczb. Pewien rodzaj teoriomnogościowej teorii liczb, wciąż czekający na odkrycie, z pewnością sięgnąłby znacznie dalej.

Dotychczas próbowałem objaśnić fakt, który nazywam *zasadniczą niezupełnością matematyki*, w odniesieniu do jednego tylko ujęcia podstaw matematyki, a mianowicie aksjomatycznej teorii mnogości. Jednak pewne bardzo ogólne twierdzenia prowadzą do wniosku, że fakt ten jest całkowicie niezależny od przyjętego ujęcia i punktu widzenia. Pierwsze z tych twierdzeń głosi po prostu, że *jakikolwiek dobrze określony zbiór aksjomatów i reguł wnioskowania wybierzemy, zawsze będą istnieć problemy diofantyczne opisanego typu, nierozstrzygalne na mocy tych aksjomatów i reguł, jeżeli tylko nie można z nich wyprowadzić żadnych fałszywych zdań tego typu*[8]. Mówiąc o dobrze określonym systemie aksjomatów i reguł, mam na myśli jedynie, że musi być możliwe faktyczne wypisanie aksjomatów w pewnej ścisłej notacji, a jeśli ich liczba jest nieskończona, należy podać skończoną procedurę pozwalającą wypisać je wszystkie po kolei. Również reguły wnioskowania powinny być takie, że dla dowolnych przesłanek można albo wypisać wniosek (na mocy którejkolwiek z reguł wnioskowania), albo wykazać, że żaden wniosek nie wynika z nich bezpośrednio na mocy rozważanej reguły wnioskowania. Te postulaty pod adresem reguł i aksjomatów są równoważne założeniu, że powinno być możliwe zbudowanie skończonej maszyny, w ścisłym sensie „maszyny Turinga”, która mogłaby wypisać po kolei wszystkie konsekwencje aksjomatów. Z tej racji rozważane twierdzenie jest równoważne faktowi, że nie istnieje skończona procedura rozstrzygania dla wszystkich problemów diofantycznych opisanego typu.

Drugie twierdzenie wiąże się z pojęciem niesprzeczności. W przypadku dobrze określonego systemu aksjomatów i reguł zagadnienie ich niesprzeczności samo jest oczywiście dobrze określonym zagadnieniem matematycznym. Co więcej, ponieważ symbole i zdania dowolnego formalizmu są zawsze co najwyżej przeliczalne, wszystko można odzwierciedlić w liczbach całkowitych, jest więc prawdopodobne, i faktycznie da się dowieść, że zagadnienie niesprzeczności można zawsze przekształcić w zagadnienie z zakresu teorii liczb (ściślej mó-

[8] Założenie to można zastąpić niesprzecznością (jak wykazał Rosser w swojej pracy [[1936]]), jednak zdania nierozstrzygalne mają wówczas nieco bardziej skomplikowaną strukturę. Należy nadto dodać założenie, że z aksjomatów wynikają pierwotne własności dodawania, mnożenia i relacji $<$.

wiąc, w jedno z zagadnień wyżej opisanego typu). Otóż twierdzenie to mówi, że *dla dowolnego dobrze określonego systemu aksjomatów i reguł zdanie stwierdzające ich niesprzeczność*[9] *(a raczej równoważne mu zdanie teorii liczb) jest niedowodliwe na podstawie tych aksjomatów i reguł, o ile te aksjomaty i reguły są niesprzeczne i wystarczą do wyprowadzenia określonego fragmentu*[10] *finitystycznej arytmetyki liczb całkowitych*. Właśnie to twierdzenie szczególnie dobrze uwidacznia zasadniczą niezupełność matematyki. Albowiem *wyklucza ono, by ktoś zbudował dobrze określony system aksjomatów i reguł oraz niesprzecznie wygłosił następujące zdanie na jego temat: Wszystkie te aksjomaty i reguły jawią mi się (z matematyczną pewnością) jako trafne, a ponadto uważam, że zawierają one całość matematyki.* Jeżeli ktoś wygłasza takie zdanie, przeczy samemu sobie[11]. Jeżeli bowiem rozważane aksjomaty jawią mu się jako trafne, to jawią mu się one również (z tą samą pewnością) jako niesprzeczne. Posiada zatem wgląd matematyczny niewywodliwy z jego aksjomatów. Należy jednak zachować ostrożność, by należycie zrozumieć znaczenie tego stanu rzeczy. Czy znaczy on, że żaden dobrze określony system trafnych aksjomatów nie może zawierać całej matematyki właściwej? Tak, o ile przez matematykę właściwą rozumiemy system wszystkich prawdziwych zdań matematycznych; nie, jeżeli rozumieć przez nią system wszystkich dowodliwych zdań matematycznych. Oba znaczenia matematyki będę rozróżniać mówiąc o matematyce w sensie obiektywnym i subiektywnym. Z pewnością żaden dobrze określony system trafnych aksjomatów nie może objąć całej matematyki obiektywnej, gdyż zdanie stwierdzające niesprzeczność systemu jest prawdziwe, ale niedowodliwe w tym systemie. Jednak co się tyczy matematyki subiektywnej, nie jest wykluczone, że istnieje skończona reguła dająca w wyniku wszystkie jej oczywiste aksjomaty. Jeżeli jednak reguła taka istnieje, to my, wyposażeni w nasze ludzkie zdolności pojmowania, z pewnością nigdy nie moglibyśmy wiedzieć, że ma ona tę właściwość, tj. nigdy nie moglibyśmy wiedzieć z matematyczną pewnością, że wszystkie zdania, do

[9] Jest to jedno ze zdań nierozstrzygalnych przy założeniu, że nie da się wyprowadzić żadnych fałszywych [[zdań]] teorii liczb (patrz twierdzenie poprzednie).

[10] A mianowicie aksjomatów Peano i reguły definiowania przez zwykłą indukcję, w połączeniu z logiką spełniającą najsurowsze wymogi finitystyczne.

[11] Jeżeli mówi jedynie „Sądzę, że jedno po drugim będą mi się one jawić jako prawdziwe" (przy czym ich liczba ma być nieskończona), nie przeczy samemu sobie (zob. niżej).

których ona prowadzi, są trafne[12]. Lub też, innymi słowy, moglibyśmy postrzegać jako prawdziwe tylko jedno zdanie po drugim, dla dowolnej skończonej ich liczby. Natomiast zdanie głoszące, że wszystkie one są prawdziwe, moglibyśmy znać co najwyżej z empiryczną pewnością, na podstawie wystarczającej liczby przypadków lub na mocy innych wnioskowań indukcyjnych[13]. Gdyby tak było, znaczyłoby to, że umysł ludzki (w dziedzinie czystej matematyki) jest równoważny maszynie skończonej, która jednak nie jest zdolna do pełnego[14] rozumienia swego własnego działania. Ta niezdolność [[człowieka]] do zrozumienia samego siebie jawiłaby mu się opacznie jako jego [[(umysłu)]] bezgraniczność czy niewyczerpalność. Proszę jednak zauważyć, że gdyby tak było, nie uchylałoby to żadną miarą zasadniczej niezupełności matematyki obiektywnej. Przeciwnie, czyniłoby ją tylko jeszcze bardziej uderzającą. Gdyby bowiem umysł ludzki był równoważny skończonej maszynie, matematyka obiektywna nie tylko byłaby zasadniczo niezupełna w tym sensie, że nie byłaby zawarta w żadnym dobrze określonym systemie aksjomatycznym, lecz nadto w tym, że istniałyby absolutnie nierozwiązywalne problemy diofantyczne opisanego wyżej typu, gdzie epitet „absolutnie" znaczy, że byłyby one nierozstrzygalne nie tylko w ramach pewnego określonego systemu aksjomatycznego, lecz przez jakikolwiek dowód matematyczny możliwy do pomyślenia dla ludzkiego umysłu. Nieuchronnie prowadzi to do następującej alternatywy: *bądź matematyka jest zasadniczo niezupełna w tym sensie, że jej oczywistych aksjomatów nigdy nie da się zawrzeć w skończonej regule,*

[12] To bowiem (lub konsekwencja tego dotycząca niesprzeczności aksjomatów) stanowiłoby wgląd matematyczny niewywodliwy z rozważanych aksjomatów i reguł, co przeczyłoby założeniu.

[13] Na przykład jest do pomyślenia (choć daleko wykracza poza granice dzisiejszej nauki), że fizjologia mózgu rozwinęłaby się tak dalece, iż byłoby wiadomo z empiryczną pewnością: 1) że mózg wystarczy do wyjaśnienia wszystkich zjawisk umysłowych i że stanowi maszynę w sensie Turinga oraz 2) że taka a taka jest dokładnie budowa anatomiczna i funkcjonowanie fizjologiczne tej części mózgu, która odpowiada za myślenie matematyczne. Jeśli ponadto zajmujemy stanowisko finitystyczne (lub intuicjonistyczne), to takie wnioskowanie indukcyjne mogłoby opierać się na (mniej lub bardziej empirycznym) przekonaniu, że matematyka niefinitystyczna (lub nieintuicjonistyczna) jest niesprzeczna.

[14] Oczywiście fizyczne działanie mechanizmu myślącego mogłoby być w pełni zrozumiałe; jednak wgląd w to, że ten konkretny mechanizm musi zawsze prowadzić do trafnych (czy choćby niesprzecznych) wyników, przekraczałoby zdolności rozumu ludzkiego.

co znaczy, że umysł ludzki (nawet w dziedzinie czystej matematyki) nieskończenie przewyższa moc dowolnej skończonej maszyny, bądź istnieją absolutnie nierozwiązywalne problemy diofantyczne wskazanego wyżej typu (przy czym nie jest wykluczone, że oba człony alternatywy są prawdziwe, istnieją więc, ściśle biorąc, trzy możliwości). To właśnie ten, dowiedziony matematycznie fakt wydaje mi się ogromnie interesujący filozoficznie. W tym kontekście ma oczywiście wielkie znaczenie to, że przynajmniej on jest całkowicie niezależny od stanowiska, jakie zajmujemy w kwestii podstaw matematyki[15].

Niezależność ta jest jednak pod jednym względem ograniczona, a mianowicie zajmowane stanowisko musi być na tyle liberalne, by dopuszczać jako sensowne zdania mówiące o wszystkich liczbach całkowitych. Gdyby ktoś był tak ścisłym finitystą, że twierdziłby, iż tylko jednostkowe zdania typu $2 + 2 = 4$ należą do matematyki właściwej[16], twierdzenie o zasadniczej niezupełności nie dotyczyłoby go – w każdym razie nie *to* twierdzenie o zasadniczej niezupełności. Nie sądzę jednak, by takiej postawy można było trzymać się w sposób spójny, dokładnie ten sam rodzaj świadectw każe nam sądzić, że $2 + 2 = 4$ oraz

---

[15] Dla intuicjonistów i finitystów twierdzenie to ma postać implikacji (a nie alternatywy). Należy odnotować, że intuicjoniści zawsze głosili pierwszy człon alternatywy (i przeczyli drugiemu, gdyż nie mogą ich zdaniem istnieć zdania, których nierozstrzygalność byłaby dowodliwa). To jednak nie ma żadnego znaczenia dla kwestii, która ewentualność stosuje się do matematyki intuicjonistycznej, jeżeli występujące w niej terminy rozumieć w sensie obiektywnym (odrzucanym przez intuicjonistów jako pozbawiony znaczenia). Co się tyczy finityzmu, bardzo prawdopodobne jest, że pierwszy człon alternatywy jest fałszywy.

[16] „Stanowisko implikacjonistyczne" K. Mengera (1930, s. 323), rozumiane w najściślejszym sensie, prowadziłoby do takiej postawy, według niego bowiem jedynymi sensownymi zdaniami matematycznymi (tj., w mojej terminologii, jedynymi należącymi do matematyki właściwej) byłyby te, które stwierdzają, że taki a taki wniosek można wyprowadzić z takich a takich aksjomatów i reguł wnioskowania w taki a taki sposób. Zdanie to jest jednak pod względem logicznym dokładnie takie samo jak $2 + 2 = 4$. A oto niektóre z niedających się utrzymać konsekwencji tego stanowiska: zdanie przeczące mówiące, że wniosku B nie można wyprowadzić z aksjomatów i reguł A, nie należałoby do matematyki właściwej; nie byłoby więc o nim wiadomo nic prócz tego, że wynika ono z pewnych innych aksjomatów i reguł. Jednak (ponieważ te inne aksjomaty i reguły są arbitralne) dowód, że zdanie to z nich wynika, żadną miarą nie wykluczałby możliwości, że (pomimo formalnego dowodu czegoś przeciwnego) pewnego dnia uda się wywieść B z A. Z tego samego powodu zwykły indukcyjny dowód tego, że $a + b = b + a$, nie wykluczałby możliwości odkrycia dwóch liczb całkowitych nie spełniających tego równania.

że $a + b = b + a$ dla dowolnych dwóch liczb całkowitych a, b. Co więcej, stanowisko to, by zachować spójność, musiałoby również wykluczyć *pojęcia* odnoszące się do *wszystkich* liczb całkowitych, takie jak „+" (lub do wszystkich formuł, jak „poprawny dowód zgodny z takimi a takimi regułami"), i zastąpić je innymi, mającymi zastosowanie jedynie do pewnej skończonej dziedziny liczb całkowitych (lub formuł). Należy jednak zauważyć, że choć prawdziwość naszej alternatywy jest niezależna od zajmowanego stanowiska, kwestia, który z jej członów jest prawdziwy, nie musi być od niego niezależna (zob. przypis 15).

Myślę, że wystarczająco już objaśniłem matematyczne aspekty sytuacji i mogę przejść z kolei do implikacji filozoficznych. Oczywiście, w następstwie mało zaawansowanego stanu filozofii w naszych czasach nie należy oczekiwać, że wnioski te zostaną wyciągnięte z matematyczną ścisłością.

Odpowiednio do alternatywnej formy głównego twierdzenia o zasadniczej niezupełności matematyki, jego implikacje filozoficzne *prima facie* też będą miały postać alternatywy; w każdym wypadku jednak okażą się zdecydowanie przeciwstawne filozofii materialistycznej. Jeżeli mianowicie prawdziwy jest pierwszy człon alternatywy, to wydaje się stąd wynikać, że działania umysłu ludzkiego nie da się sprowadzić do działania mózgu, który wedle wszelkich danych jest skończoną maszyną o skończonej liczbie części, a mianowicie neuronów i ich połączeń. Zdaje się to prowadzić do jakiejś wersji stanowiska witalistycznego. Z kolei drugi człon alternatywy, głoszący istnienie absolutnie nierozstrzygalnych zdań matematycznych, wydaje się obalać pogląd, że matematyka jest jedynie naszym wytworem; twórca bowiem z konieczności zna wszystkie własności swych wytworów, gdyż nie mogą one mieć żadnych własności prócz tych, które on im nadał. Tak więc ten człon alternatywy zdaje się implikować, że przedmioty i fakty matematyczne (lub przynajmniej *coś* w nich) istnieją obiektywnie i niezależnie od naszych czynności umysłowych i decyzji, a zatem wydaje się implikować taką czy inną formę platonizmu lub „realizmu" w odniesieniu do przedmiotów matematycznych[17]. Albowiem empiryczna interpretacja

---

[17] Nie istnieje termin dostatecznie ogólny, by wyrazić dokładnie ten wniosek, który mówi tylko tyle, że przedmioty i twierdzenia matematyki są tak samo obiektywne i niezależne od naszych wolnych wyborów i aktów twórczych, jak świat fizyczny. Nie rozstrzyga on jednak w żaden sposób, czym są te obiektywne byty, a w szczególności, czy są umiejscowione w przyrodzie, ludzkim umyśle czy ani

matematyki[18], tj. pogląd że fakty matematyczne są szczególnym rodzajem faktów fizycznych lub psychologicznych, jest zbyt niedorzeczna, by można ją było poważnie podtrzymywać (patrz niżej). Nie wiadomo, czy pierwszy człon alternatywy jest prawdziwy, w każdym jednak razie jest on zgodny z poglądami niektórych spośród czołowych przedstawicieli fizjologii mózgu i nerwów, którzy bardzo stanowczo przeczą możliwości czysto mechanistycznego wyjaśnienia procesów psychicznych i nerwowych.

Co się tyczy drugiego członu alternatywy, ktoś mógłby zaoponować wskazując na to, że budowniczy nie musi koniecznie znać każdej własności tego, co buduje. Na przykład budujemy maszyny, a mimo to nie potrafimy przewidzieć ich zachowania pod każdym względem. Jest to jednak bardzo mizerny zarzut. Maszyn nie tworzymy bowiem z niczego, lecz budujemy z pewnych danych z góry materiałów. Gdyby sytuacja w matematyce była podobna, ten materiał czy podstawa naszych konstrukcji byłyby czymś obiektywnym i wymuszałyby na nas zajęcie stanowiska realistycznego, nawet gdyby pewne inne składniki matematyki były naszym własnym wytworem. Byłoby tak również wtedy, gdybyśmy w naszych twórczych poczynaniach używali jakiegoś narzędzia znajdującego się w nas, jednak różnego od naszego ja (np. „rozumu", interpretowanego jako coś w rodzaju maszyny myślącej). Wówczas bowiem fakty matematyczne wyrażałyby (przynajmniej po części) własności tego narzędzia, które istniałoby obiektywnie.

---

tu, ani tam. Te trzy poglądy na naturę matematyki odpowiadają dokładnie trzem poglądom na naturę pojęć, które tradycyjnie noszą miana psychologizmu, arystotelesowskiego realizmu i platonizmu.

[18] Tj. pogląd, że przedmioty matematyczne i sposób, w jaki je poznajemy, nie różnią się istotnie od przedmiotów fizycznych czy psychicznych oraz praw przyrody. Prawdziwy stan rzeczy jest przeciwny: jeżeli zakładamy obiektywność matematyki, to od razu wynika stąd wniosek, że jej przedmioty muszą być całkowicie odmienne od przedmiotów zmysłowych, ponieważ: 1) Zdania matematyczne, poprawnie zanalizowane, nie mówią niczego o faktycznym świecie w czasie i przestrzeni. Jest to szczególnie jasne w przypadku zdań stosowanych, jak np.: „Wczoraj padał deszcz lub nie padał deszcz". Uwaga ta nie wyklucza istnienia wiedzy czysto pojęciowej (poza matematyką) spełniającej te wymogi. 2) Przedmioty matematyczne poznajemy w sposób ścisły, a prawa ogólne można poznawać w sposób pewny, tj. w wyniku wnioskowania dedukcyjnego, a nie indukcyjnego. 3) Można je poznawać (w zasadzie) bez użycia zmysłów (tj. za pomocą samego rozumu), właśnie dlatego, że nie dotyczą faktów, o których informują nas zmysły (w tym zmysł wewnętrzny), lecz możliwości i niemożliwości.

Po trzecie, ktoś mógłby zaoponować, że znaczenie zdania mówiącego o wszystkich liczbach całkowitych może polegać jedynie na istnieniu ogólnego dowodu, nie sposób bowiem sprawdzić go po kolei dla wszystkich liczb całkowitych. A przeto w przypadku nierozstrzygalnego zdania o wszystkich liczbach całkowitych ani ono samo, ani jego negacja nie są prawdziwe. Ani jedno, ani drugie nie wyraża zatem żadnej obiektywnie istniejącej, ale nieznanej własności liczb całkowitych. Nie jestem teraz w stanie rozważyć kwestii epistemologicznej, czy pogląd ten jest w ogóle spójny. Z pewnością wydaje się, że najpierw trzeba rozumieć znaczenie zdania, zanim będzie można zrozumieć jego dowód, że zatem znaczenia „wszystkich" nie można zdefiniować za pomocą znaczenia „dowodu". Jednak niezależnie od tych dociekań epistemologicznych chciałbym zwrócić uwagę na to, że można przypuszczać prawdziwość zdania ogólnego (np. że będę w stanie potwierdzić pewną własność dla dowolnej danej mi liczby całkowitej), a jednocześnie przypuszczać, że nie istnieje ogólny dowód tego faktu. Łatwo sobie wyobrazić sytuacje, w których oba przypuszczenia mogą być bardzo dobrze ugruntowane. Co się tyczy pierwszego z nich, byłoby tak np. w przypadku, gdyby rozważane zdanie było równaniem $F(n) = G(n)$, po którego obu stronach występowałyby funkcje arytmetyczne, i które można by sprawdzić aż do bardzo dużych liczb n[19]. Co więcej, podobnie jak w naukach przyrodniczych, ta *inductio per enumerationem simplicem* bynajmniej nie stanowi jedynej możliwej do pomyślenia metody indukcyjnej w matematyce. Przyznaję, że każdy matematyk ma wrodzoną niechęć do przydawania argumentom indukcyjnym znaczenia większego niż czysto heurystyczne. Sądzę jednak, że jest to wyłącznie skutek przesądu, że przedmioty matematyczne są w jakimś sensie pozbawione rzeczywistego istnienia. Jeżeli matematyka opisuje obiektywny świat tak samo jak fizyka, nie ma powodu, dla którego metody

[19] Takie sprawdzenie równości (ale nie nierówności) dwóch funkcji arytmetycznych o nie nazbyt skomplikowanej czy sztucznej strukturze z pewnością przydawałoby wielkiego prawdopodobieństwa ich pełnej równości, aczkolwiek jego wartość w liczbach nie mogłaby zostać oszacowana w obecnym stanie nauki. Łatwo jednak można podać przykłady zdań ogólnych o liczbach całkowitych, dla których prawdopodobieństwo to można oszacować nawet dzisiaj. Np. prawdopodobieństwo zdania stwierdzającego, że dla każdego n istnieje co najmniej jedna cyfra $\neq 0$ między n-tą a n^2-tą cyfrą rozwinięcia dziesiętnego liczby π, jest zbieżne do 1 dla coraz większych n. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku twierdzeń Goldbacha i Fermata [[*sic*]].

indukcyjne nie mogłyby być stosowane w matematyce tak samo jak w fizyce. Faktem jest, że w matematyce wciąż przeważa ta sama postawa, która dawnej obowiązywała w stosunku do całej nauki, a mianowicie próbujemy wyprowadzać wszystko za pomocą konkluzywnych dowodów z definicji (czyli, w terminologii ontologicznej, z istot rzeczy). Przypuszczalnie metoda ta, o ile pretenduje do monopolu, jest równie błędna w matematyce, jak była w fizyce.

Rozważania te pokazują przy okazji, że implikacje filozoficzne przedstawionych faktów matematycznych nie leżą bez reszty po stronie filozofii racjonalistycznej lub idealistycznej, lecz pod jednym względem przemawiają na korzyść stanowiska empirystycznego[20]. To prawda, że tylko drugi z członów alternatywy wskazuje w tym kierunku. Jednak – i tę właśnie kwestię chcę teraz rozważyć – wydaje mi się, że wnioski filozoficzne płynące z przyjęcia drugiego członu alternatywy, w szczególności realizm pojęciowy (platonizm), znajdują również wsparcie we współczesnych osiągnięciach w dziedzinie podstaw matematyki bez względu na to, który z członów alternatywy jest prawdziwy. Główne argumenty na rzecz takiej oceny sytuacji wydają mi się następujące.

Przede wszystkim, gdyby matematyka była naszym swobodnym wytworem, niewiedza dotycząca przedmiotów, które stworzyliśmy, mogłaby wprawdzie mieć miejsce, jednak tylko wskutek braku jasnej świadomości tego, co rzeczywiście stworzyliśmy (lub może wskutek praktycznych trudności, jakich nastręczają zbyt skomplikowane obliczenia). Powinna zatem zniknąć (przynajmniej w zasadzie, choć może nie w praktyce)[21], gdy tylko osiągniemy pełną jasność. Tymczasem, choć współczesne badania w dziedzinie podstaw matematyki osiągnęły niespotykany wcześniej stopień ścisłości, nie przyczyniło się to praktycznie w ogóle do rozwiązania problemów matematycznych.

Po drugie, działalność matematyka w bardzo niewielkim stopniu cechuje swoboda, jaką powinien cieszyć się twórca. Nawet gdyby, dajmy na to, aksjomaty opisujące liczby całkowite były swobodnym wynalazkiem, trzeba przyznać, że wyobraziwszy sobie pierwszych kilka

[20] Mówiąc dokładniej, sugerują one, że sytuacja w matematyce nie jest aż tak odmienna od tej w naukach przyrodniczych. To, czy w ostatecznym rachunku rację ma aprioryzm czy empiryzm, jest już inną kwestią.

[21] To znaczy, że każdy problem powinien być sprowadzalny do pewnego skończonego obliczenia.

własności swych przedmiotów, matematyk osiąga kres swych zdolności twórczych i nie jest w stanie do woli stwarzać również prawdziwości swych twierdzeń. Jeżeli w matematyce istnieje w ogóle jakaś twórczość, to każde twierdzenie stanowi pewne ograniczenie swobody tworzenia. Ale to, co ogranicza twórczość, musi oczywiście istnieć niezależnie od niej[22].

I po trzecie, jeżeli przedmioty matematyki są naszymi tworami, to oczywiście liczby całkowite i zbiory liczb całkowitych muszą być dwoma różnymi tworami, z których pierwszy nie pociąga za sobą koniecznie drugiego. Tymczasem do udowodnienia pewnych zdań o liczbach całkowitych konieczne jest pojęcie zbioru liczb całkowitych. By zatem stwierdzić, jakie własności m y nadaliśmy pewnym przedmiotom w naszej wyobraźni, musimy najpierw stworzyć pewne inne przedmioty – zaiste, bardzo dziwna sytuacja!

To, co powiedziałem dotychczas, sformułowane zostało przy użyciu dość nieostrego pojęcia „swobodnej twórczości" lub „swobodnej inwencji". Próbowano nadać tym terminom bardziej precyzyjne znaczenie. Ma to jednak tylko taki skutek, że również obalenie rozważanego stanowiska zyskuje na precyzji i dobitności. Chciałbym pokazać to szczegółowo na przykładzie najbardziej precyzyjnego, a zarazem najbardziej radykalnego z podanych dotychczas sformułowań. Chodzi o interpretację zdań matematycznych jako wyrażających jedynie pewne aspekty konwencji syntaktycznych (lub językowych)[23], czyli po pro-

---

[22] Nie można powiedzieć, że ograniczenia te powstają wskutek wymogu niesprzeczności, który sam jest naszym wolnym wyborem, ktoś mógłby bowiem wybrać stworzenie niesprzeczności *i* pewnych twierdzeń. Na nic nie zda się też powiedzenie, że twierdzenia jedynie powtarzają (w całości lub w części) własności uprzednio wynalezione, wówczas bowiem ścisłe ujęcie tego, co zostało uprzednio założone, musiałoby wystarczyć do rozstrzygnięcia dowolnej kwestii pojawiającej się na gruncie teorii, temu jednak przeczy pierwszy [[argument (wyżej)]] i trzeci argument [[(niżej)]].

[23] Chodzi o to, że konwencje nie mogą odnosić się do żadnych obiektów pozajęzykowych (co ma miejsce w przypadku definicji wskazującej), lecz mają ustalać reguły dotyczące znaczenia i prawdziwości wyrażeń symbolicznych wyłącznie na podstawie ich zewnętrznej budowy. Ponadto reguły te nie mogą oczywiście implikować prawdziwości ani fałszywości żadnych zdań o faktach (w takim przypadku bowiem z pewnością nie można by ich nazwać pozbawionymi treści czy syntaktycznymi). To jednak pociąga za sobą ich niesprzeczność, sprzeczność bowiem (w logice klasycznej, którą tu zakładamy) implikowałaby każde zdanie o faktach. Należy zauważyć, że jeśli termin „reguła syntaktyczna" rozumieć w tak ogólny sposób,

stu powtarzających fragmenty tych konwencji. W myśl tego poglądu zdania matematyki, należycie zanalizowane, muszą okazać się równie pozbawione treści, jak np. zdanie „Wszystkie ogiery są końmi". Każdy się zgodzi, że zdanie to nie wyraża żadnego faktu zoologicznego ani żadnego innego obiektywnego faktu, gdyż jego prawdziwość zasadza się wyłącznie na okoliczności, że wybraliśmy termin „ogier" jako skrót terminu „koń płci męskiej".

Zdecydowanie najpowszechniejszym typem konwencji symbolicznych są definicje (wyraźne lub kontekstowe, przy czym te drugie muszą pozwalać na eliminację terminu definiowanego we wszystkich kontekstach, w których on występuje). Przeto najprostsza wersja rozważanego poglądu polegałaby na powiedzeniu, że zdania matematyczne są prawdziwe wyłącznie na mocy definicji terminów w nich występujących, tj. że zastępując krok po kroku wszystkie terminy przez ich definiensy można każde twierdzenie sprowadzić do wyraźniej tautologii $a = a$ (zauważmy, że $a = a$ należy uznać za prawdziwe, o ile za takowe uznajemy definicje, można bowiem zdefiniować b przez $b = a$, a następnie na mocy tej definicji zastąpić w tej równości b przez a).

Jednakże ze wspomnianych wcześniej twierdzeń bezpośrednio wynika, że takie sprowadzenie do wyraźnych tautologii jest niemożliwe. Natychmiast bowiem dostarczyłoby ono mechanicznej procedury roz-

---

to rozważany teraz pogląd obejmuje, jako jego uszczegółowienie, formalistyczne ugruntowanie matematyki. Zgodnie z tym ostatnim bowiem matematyka opiera się w całości na pewnych regułach syntaktycznych o postaci: zdania o takiej a takiej budowie są prawdziwe [aksjomaty], i jeżeli zdania o budowie... są prawdziwe, to prawdziwe są również takie a takie zdania; a ponadto, o czym łatwo się przekonać, dowód niesprzeczności daje gwarancję, że reguły te są pozbawione treści, skoro nie wynikają z nich żadne zdania o faktach. Z drugiej strony okaże się w dalszym ciągu, że również odwrotnie, wykonalność programu nominalistycznego pociąga za sobą wykonalność programu formalistycznego (bardzo klarowne prezentacje filozoficznych aspektów tego nominalistycznego poglądu można znaleźć w pracy Hahna [1935] lub Carnapa [1935]). Można mieć wątpliwości, czy ten (nominalistyczny) pogląd należy w ogóle zaliczać do poglądów uznających matematykę za swobodny twór umysłu, ponieważ przeczy on całkowicie istnieniu przedmiotów matematycznych. Poza tym związki między oboma typami poglądów są wyjątkowo ścisłe, gdyż również zgodnie z drugim z nich istnienie przedmiotów matematycznych polega wyłącznie na ich byciu konstruowanymi w myśli, a z kolei nominaliści nie zaprzeczyliby, że faktycznie wyobrażamy sobie (nieistniejące) przedmioty jako odpowiedniki symboli matematycznych i że te subiektywne przedstawienia mogą nawet dostarczać zasad przewodnich służących wyborowi reguł syntaktycznych.

strzygania prawdziwości lub fałszywości każdego zdania matematycznego. Jednak procedura taka nie może istnieć, nawet dla teorii liczb. To obalenie stosuje się wprawdzie tylko do najprostszej wersji tego (nominalistycznego) stanowiska. Jednak wersje bardziej wyrafinowane nie są w ani trochę lepszej sytuacji. Najsłabsze twierdzenie, które powinno być dowodliwe, by ten pogląd głoszący tautologiczny charakter matematyki dał się utrzymać, jest następujące: Każde dowodliwe zdanie matematyczne można wydedukować wyłącznie z reguł dotyczących prawdziwości i fałszywości zdań (tj. nie używając ani nie biorąc pod uwagę niczego prócz tych reguł), i nie można w ten sposób wyprowadzić negacji dowodliwych zdań matematycznych[24]. W precyzyjnie skonstruowanych językach reguły takie (tj. reguły postulujące, w jakich okolicznościach dane zdanie jest prawdziwe) służą jako środek do określenia znaczenia zdań. Poza tym we wszystkich znanych językach są zdania, które wydają się prawdziwe wyłącznie na mocy tych reguł. Przykładowo, jeżeli alternatywę i negację wprowadzamy za pomocą tych reguł:

1) $p \vee q$ jest prawdziwe, jeżeli co najmniej jeden z członów jest prawdziwy,

oraz

2) $\sim p$ jest prawdziwe, jeżeli p nie jest prawdziwe,

to z reguł tych jasno wynika, że $p \vee \sim p$ jest zawsze prawdziwe, jakiekolwiek byłoby p (zdania dające się w ten sposób wywieść nazywają się tautologiami). Otóż jest rzeczywiście tak, że w symbolice logiki matematycznej, z odpowiednio dobranymi regułami semantycznymi, prawdziwość aksjomatów matematycznych rzeczywiście da się wywieść z tych reguł[25]; jednakże (i to jest największa przeszkoda) w celu ich wyprowadzenia trzeba się posłużyć matematycznymi i logicznymi poję-

[24] Co się tyczy wymogu niesprzeczności, patrz przyp. 24.

[25] Zobacz prace Ramseya (1926, s. 368, 382) oraz Carnapa (1937, s. 39, 110). Warto wspomnieć, że Ramseyowi udało się nawet sprowadzić je do wyraźnych tautologii $a = a$ za pomocą wyraźnych definicji (patrz s. 23 wyżej), jednak za cenę przyzwolenia na zdania o długości nieskończonej (a nawet pozaskończonej), co oczywiście pociąga za sobą konieczność założenia pozaskończonej teorii mnogości w celu poradzenia sobie z tymi nieskończonymi bytami. Carnap ogranicza się do zdań o skończonej długości, ale za to musi rozważać nieskończone zbiory, zbiory zbiorów etc. tych skończonych zdań.

ciami i aksjomatami w pewien określony sposób, a mianowicie jako odnoszącymi się do symboli, połączeń symboli, zbiorów takich połączeń itd. Dlatego, jeśli teoria ta ma dowodzić tautologicznego charakteru aksjomatów matematycznych, musi najpierw założyć ich prawdziwość. Choć zatem początkowo stanowisko to zmierzało do wytłumaczenia prawdziwości aksjomatów matematycznych poprzez pokazanie, że są one tautologiami, jego punkt dojścia okazuje się dokładnie przeciwny, a mianowicie trzeba n a j p i e r w założyć prawdziwość aksjomatów, a dopiero p o t e m można pokazać, że w odpowiednio dobranym języku są one tautologiami. Co więcej, podobne twierdzenie zachowuje ważność dla pojęć matematycznych, a mianowicie nie sposób zdefiniować ich znaczenia za pomocą konwencji symbolicznych, trzeba bowiem znać wprzódy ich znaczenie, by zrozumieć odpowiednie konwencje syntaktyczne czy dowód, że pociągają one za sobą aksjomaty matematyczne, ale nie ich negacje. Jasne jest teraz, że ta realizacja poglądu nominalistycznego nie spełnia wymogu sformułowanego na s. 24, ponieważ do wyprowadzenia aksjomatów matematycznych używa się nie tylko reguł syntaktycznych, lecz nadto również całej matematyki. Co więcej jednak, ta realizacja nominalizmu dostarczyłaby jego natychmiastowego o b a l e n i a (muszę przyznać, że nie wyobrażam sobie lepszego obalenia tego poglądu, niż ten jego dowód), gdyby przyjąć jedno dodatkowe założenie, a mianowicie że opisany wynik jest nieunikniony (tj. niezależny od wybranego języka symbolicznego i interpretacji matematyki). Otóż, choć nie można dowieść dokładnie tego, można wykazać coś na tyle zbliżonego, że również wystarczy to do obalenia rozważanego poglądu. Otóż na mocy wspomnianych twierdzeń metateoretycznych okazuje się, że dowód tautologicznego charakteru (w odpowiednim języku) aksjomatów matematycznych jest zarazem dowodem ich niesprzeczności, nie może więc być osiągnięty za pomocą s ł a b s z y c h środków dowodowych niż zawarte w samych tych aksjomatach. Nie znaczy to, że w dowodzie niesprzeczności danego systemu trzeba użyć w s z y s t k i c h jego aksjomatów. Zwykle bowiem konieczne do tego celu aksjomaty zewnętrzne wobec systemu czynią zbędnymi niektóre z aksjomatów systemu (choć ich nie implikują)[26].

---

[26] Przykładowo, dla każdego systemu aksjomatycznego *S* teorii mnogości, należącego do ciągu zdefiniowanego na początku tego wykładu, z dołączonym aksjomatem wyboru, można dowieść niesprzeczności tego systemu za pomocą aksjomatu kolejnego rzędu (lub za pomocą aksjomatu, że *S* jest niesprzeczny) bez

Jedno wszakże wynika stąd z praktyczną koniecznością: by dowieść niesprzeczności klasycznej teorii liczb (i *a fortiori* wszystkich systemów mocniejszych), należy użyć pewnych pojęć abstrakcyjnych (i odnoszących się do nich, bezpośrednio oczywistych aksjomatów), gdzie pojęcia „abstrakcyjne" to takie, które nie odnoszą się do przedmiotów zmysłów[27], których szczególnym rodzajem są symbole. Te abstrakcyjne pojęcia z pewnością jednak nie są syntaktyczne, należą one raczej do pojęć, których uprawomocnienie na drodze rozważań syntaktycznych powinno być głównym zadaniem nominalizmu. Wynika z tego, że *nie istnieje racjonalne uprawomocnienie naszych przedkrytycznych przekonań dotyczących stosowalności i spójności matematyki klasycznej* (nawet jej najbardziej elementarnego szczebla, teorii liczb), *oparte na interpretacji syntaktycznej.* Wprawdzie diagnoza ta nie stosuje się do pewnych podsystemów matematyki klasycznej, które mogą nawet zawierać pewną część teorii pojęć abstrakcyjnych, o które tu chodzi. W tym sensie nominalizm może odnotować częściowy sukces. Faktycznie bowiem jest możliwe oparcie aksjomatów tych systemów na podstawach czysto syntaktycznych. W ten sposób można np. uprawomocnić syntaktycznie użycie pojęć „wszystkie" i „istnieje" w odniesieniu do liczb całkowitych (tj. wykazać jego niesprzeczność). Jednak co się tyczy najważniejszego aksjomatu teorii liczb, indukcji zupełnej, takie syntaktyczne ugruntowanie, nawet w tych granicach, w jakich jest możliwe, nie uprawomocnia naszej przedkrytycznej wiary w ten aksjomat, gdyż jego samego musi się uży-

---

uciekania się do aksjomatu wyboru. Podobnie, nie jest rzeczą niemożliwą wykazanie niesprzeczności aksjomatów niższych szczebli tej hierarchii za pomocą aksjomatów wyższych szczebli, jednak opatrzonych takimi ograniczeniami, przy których byłyby one do zaakceptowania dla intuicjonistów.

[27] Przykłady takich pojęć abstrakcyjnych to „zbiór", „funkcja liczb całkowitych", „dowodliwy" (to ostatnie w nieformalistycznym sensie „dający się poznać jako prawdziwy"), „wywodliwy" itd., a wreszcie „istnieje", w odniesieniu do wszelkich *możliwych* kombinacji symboli. Niezbędność takich pojęć dla dowodu niesprzeczności matematyki klasycznej wynika z faktu, że symbole można odwzorować w liczbach całkowitych, a przeto finitystyczna (i *a fortiori* klasyczna) teoria liczb zawiera wszystkie dowody oparte wyłącznie na nich. Racje przemawiające za tym faktem nie są jak na razie w pełni konkluzywne, gdyż oczywiste aksjomaty odnoszące się do rozważanego pojęcia nieabstrakcyjnego nie zostały jeszcze dość dokładnie zbadane. Sam fakt jednak przyznają nawet czołowi formaliści (Bernays, 1941, s. 144, 147; 1935, s. 68, 69; 1935b, s. 94; 1934, s. 2; Gentzen, 1937, s. 203).

wać w rozważaniach syntaktycznych[28]. Fakt, że im skromniejsze są aksjomaty, dla których chcemy uzyskać interpretację tautologiczną, tym mniej matematyki potrzebujemy, by to osiągnąć, ma tę konsekwencję, że gdy w końcu stajemy się tak skromni, iż ograniczamy się do pewnej dziedziny skończonej, np. liczb całkowitych do 1000, wówczas zdania matematyczne ważne w tej dziedzinie można zinterpretować tak, by okazywały się tautologiczne nawet w najściślejszym sensie, tj. sprowadzalne do wyraźnych tautologii za pomocą wyraźnych definicji terminów. Nic dziwnego, albowiem fragment matematyki niezbędny do dowodu niesprzeczności tej skończonej matematyki zawarty jest już w teorii skończonych procesów kombinatorycznych, niezbędnych do sprowadzenia jakiejś formuły do wyraźnej tautologii za pomocą podstawień. Tłumaczy to znany, choć mylący fakt, że formuły w rodzaju $5 + 7 = 12$ można za pomocą pewnych definicji sprowadzić do wyraźnych tautologii. Fakt ten jest mylący również z tego powodu, że w tych redukcjach (o ile interpretować je jako proste podstawienia *definiensu* za *definiendum* na podstawie wyraźnych definicji) + nie jest identyczny ze zwykłym +, ponieważ może być zdefiniowany tylko dla skończonej liczby argumentów (przez wyliczenie tej skończonej liczby przypadków). Jeżeli natomiast + definiuje się kontekstowo, to pojęcia skończonej rozmaitości trzeba użyć już w dowodzie $2 + 2 = 4$. Podobna kolistość pojawia się w dowodzie tego, że formuła $p \vee \sim p$ jest tautologią, ponieważ ewidentnie występują w niej alternatywa i negacja w swych intuicyjnych znaczeniach.

Istotą tego poglądu jest teza, że nie ma niczego takiego jak fakt matematyczny, że prawdziwość zdań, które w naszym przekonaniu wyrażają fakty matematyczne, znaczy jedynie, że (na mocy dość skomplikowanych reguł definiujących znaczenie zdań, tj. ustalających, w jakich okolicznościach dane zdanie jest prawdziwe) w zdaniach tych język pracuje na jałowym biegu, wspomniane reguły sprawiają bowiem, że

[28] Wysunięty tu zarzut przeciwko syntaktycznemu ugruntowaniu teorii liczb jest zasadniczo taki sam jak ten, który Poincaré wytoczył przeciwko ugruntowaniu teorii liczb przez Fregego i Hilberta. Zarzut ten nie jest jednak uzasadniony w odniesieniu do Fregego, ponieważ pojęcia i aksjomaty logiczne, które musi on zakładać, nie zawierają w sposób wyraźny pojęcia „skończonej rozmaitości" z jego aksjomatami, podczas gdy pojęcia i rozważania gramatyczne niezbędne do sformułowania reguł syntaktycznych i wykazania ich tautologicznego charakteru zawierają je.

są one prawdziwe bez względu na fakty. Zdania takie można trafnie nazwać pozbawionymi treści. Otóż faktycznie jest możliwe zbudowanie języka, w którym zdania matematyczne są w tym sensie pozbawione treści. Kłopot w tym jedynie, że:

1) w celu wykazania, że fakty matematyczne nie istnieją, trzeba odwołać się do tych samych (lub innych, równie skomplikowanych) faktów matematycznych;
2) zgodnie z tą metodą, jeżeli dany jest podział faktów empirycznych na dwie części *A* i *B* takie, że *B* nie ma żadnych konsekwencji w *A*, to można skonstruować język, w którym zdania wyrażające *B* byłyby pozbawione treści. A gdyby twój oponent powiedział: „Arbitralnie pomijasz pewne obserwowalne fakty *B*", można by odpowiedzieć: „Robisz to samo, np. z prawem indukcji zupełnej, które ja postrzegam jako prawdziwe na podstawie mojego rozumienia (tj. percepcji) pojęcia liczby całkowitej."

Mimo to wydaje mi się, że jeden składnik tej błędnej teorii prawdy matematycznej jest zupełnie słuszny i rzeczywiście odsłania naturę matematyki. Prawdą jest mianowicie, że zdanie matematyczne nie mówi niczego o rzeczywistości fizycznej czy psychicznej istniejącej w przestrzeni i czasie, gdyż jest prawdziwe na mocy znaczenia występujących w nim terminów, niezależnie od świata rzeczywistych przedmiotów. Błędne jest natomiast twierdzenie, że znaczenie terminów (tj. pojęcia, które one denotują) jest czymś wytworzonym przez człowieka i opartym wyłącznie na konwencjach semantycznych. Uważam, że naprawdę pojęcia te tworzą odrębną rzeczywistość, której nie możemy stwarzać ani zmieniać, a jedynie postrzegać i opisywać[29].

A zatem zdanie matematyczne, mimo iż nie mówi niczego o rzeczywistości czasoprzestrzennej, może jednak mieć niewątpliwą treść przedmiotową, gdyż mówi coś o relacjach pojęć. Istnienie innych niż „tautologiczne" relacji między pojęciami przejawia się nade wszystko

[29] Dotyczy to również tej części matematyki, którą można sprowadzić do reguł syntaktycznych (patrz wyżej). Reguły te są bowiem oparte na pojęciu skończonej rozmaitości (a mianowicie skończonego ciągu symboli), a to pojęcie i jego własności są całkowicie niezależne od naszego swobodnego wyboru. W istocie jego teoria jest równoważna teorii liczb całkowitych. Możliwość skonstruowania języka w taki sposób, by teoria ta była weń wbudowana w postaci reguł syntaktycznych, nie dowodzi niczego.

w okoliczności, że dla terminów pierwotnych matematyki należy przyjąć aksjomaty, które bynajmniej nie są tautologiami (nie są bowiem w żaden sposób sprowadzalne do $a = a$), a jednak wynikają ze znaczenia tych terminów pierwotnych. Przykładowo, podstawowy aksjomat, a raczej schemat aksjomatów, dla pojęcia zbioru liczb całkowitych mówi, że jeśli dana jest jakaś dobrze określona własność liczb całkowitych (tj. wyrażenie zdaniowe $\varphi(n)$ ze zmienną całkowitą n), to istnieje zbiór M liczb całkowitych posiadających własność φ. Otóż biorąc pod uwagę to, że również φ może zawierać termin „zbiór liczb całkowitych", otrzymujemy ciąg ściśle powiązanych aksjomatów dotyczących pojęcia zbioru. Aksjomatów tych jednak (jak pokazują wymienione wcześniej wyniki) nie można sprowadzić do niczego istotnie prostszego, a więc tym bardziej do wyraźnych tautologii. Wprawdzie aksjomaty te są ważne na mocy znaczenia terminu „zbiór", można wręcz powiedzieć, że wyrażają one znaczenie tego terminu, można je więc trafnie nazwać analitycznymi; jednak termin „tautologiczne", tj. pozbawione treści, jest w stosunku do nich zupełnie nie na miejscu, ponieważ nawet stwierdzenie istnienia pojęcia zbioru spełniającego te aksjomaty (czyli niesprzeczności tych aksjomatów) jest tak dalekie od bycia pustym, że nie można go udowodnić, nie używając znów pojęcia zbioru lub jakiegoś innego pojęcia abstrakcyjnego o podobnym charakterze.

Argument ten jest oczywiście adresowany tylko do matematyków akceptujących ogólne pojęcie zbioru w matematyce właściwej. Jednak w stosunku do finitystów można by wysunąć dosłownie taki sam argument w odniesieniu do pojęcia liczby całkowitej i aksjomatu indukcji zupełnej. Jeżeli bowiem n i e przyjmujemy ogólnego pojęcia zbioru w matematyce właściwej, to musimy jako aksjomat przyjąć indukcję zupełną.

Pragnę powtórzyć, że „analityczny" nie znaczy tutaj „prawdziwy na mocy definicji", lecz „prawdziwy na mocy natury pojęć", w odróżnieniu od „prawdziwy na mocy własności i zachowania rzeczy". To pojęcie analityczności jest tak dalekie od pojęcia „pozbawiony treści", że jest w pełni możliwe, by jakieś zdanie analityczne było nierozstrzygalne (lub rozstrzygalne tylko z pewnym prawdopodobieństwem). Nasza znajomość świata pojęć może być bowiem równie ograniczona i niepełna, jak nasza znajomość świata rzeczy. Z pewnością nie da się zaprzeczyć, że w pewnych przypadkach wiedza ta jest nie tylko niepełna, lecz nawet niewyraźna. Przejawia się to w paradoksach teorii mnogości, które często przytacza się jako obalenie platonizmu, choć moim zdaniem zupełnie niesłusznie. Nasze postrzeżenia wzrokowe często przeczą naszym spostrzeżeniom dotykowym, jak w przypadku pręta zanurzonego w wodzie, a przecież nikt przy zdrowych zmysłach nie wyciąga stąd wniosku, że świat zewnętrzny nie istnieje.

Celowo mówię o dwóch odrębnych światach (świecie rzeczy i świecie pojęć), nie sądzę bowiem, by Arystotelesowski realizm (zgodnie z którym pojęcia są częściami czy aspektami rzeczy) dał się utrzymać.

Nie twierdzę oczywiście, że dotychczasowe rozważania dostarczają prawdziwego dowodu słuszności tego poglądu na naturę matematyki. Mógłbym co najwyżej powiedzieć, że obaliłem pogląd nominalistyczny, zgodnie z którym matematyka zasadza się wyłącznie na konwencjach syntaktycznych i ich konsekwencjach. Ponadto wysunąłem kilka mocnych argumentów przeciwko ogólniejszemu poglądowi, że matematyka jest naszym własnym wytworem. Istnieją jednak inne alternatywy wobec platonizmu, w szczególności psychologizm i realizm Arystotelesowski. W celu uzasadnienia realizmu Platońskiego należałoby te inne teorie obalić jedną po drugiej, a następnie pokazać, że wyczerpują one wszystkie możliwości. Nie jestem w stanie teraz tego uczynić, chciałbym jednak sformułować kilka wskazówek zmierzających w tym kierunku. Jedna z możliwych form psychologizmu akcentuje to, że matematyka bada relacje między pojęciami i że pojęć nie możemy dowolnie tworzyć, lecz są nam one dane jako pewna realność, której nie możemy zmieniać; zarazem jednak utrzymuje on, że pojęcia te są jedynie dyspozycjami psychicznymi, tj., by tak rzec, jedynie kółkami w naszej maszynie myślącej. By ująć to ściślej, pojęcie sprowadzałoby się do dyspozycji:

1) do posiadania pewnego określonego doświadczenia umysłowego, gdy myślimy o nim

oraz

2) do wydawania pewnych sądów (lub posiadania pewnych doświadczeń należących do wiedzy bezpośredniej) na temat jego relacji do innych pojęć lub przedmiotów empirycznych.

Istotą tego psychologistycznego poglądu jest to, że przedmiotem matematyki są jedynie prawa psychologiczne rządzące pojawianiem się w nas myśli, przekonań itd., w takim samym sensie, w jakim przedmiotem pewnej innej części psychologii są prawa, zgodnie z którymi pojawiają się w nas emocje. W chwili obecnej głównym zarzutem pod adresem tego poglądu wydaje mi się to, że gdyby był on trafny, nie mielibyśmy żadnej wiedzy matematycznej. Nie wiedzielibyśmy np., że 2 + 2 = 4, lecz tylko tyle, że nasz umysł jest tak skonstruowany, że uważa to za prawdę, a wtedy nie istniałby żaden powód, dla którego jakiś inny tok myśli nie mógłby nas doprowadzić z tym samym stopniem pewności do przeciwnego wniosku. Ktokolwiek zatem zakłada, że istnieje choćby najmniejsza dziedzina zdań matematycznych, o których wiemy, że są prawdziwe, nie może przyjmować tego poglądu.

Mam wrażenie, że po należytym rozjaśnieniu wchodzących tu w grę pojęć możliwe będzie prowadzenie tych dyskusji z matematyczną ścisłością, i że ich wynik (przy pewnych założeniach, które trudno podważyć, w szczególności że istnieje w ogóle coś takiego jak wiedza matematyczna) będzie taki, że jedynym dającym się utrzymać poglądem jest platonizm. Rozumiem przez to pogląd, że matematyka opisuje pewną niezmysłową rzeczywistość, istniejącą niezależnie zarówno od czynności, jak i dyspozycji ludzkiego umysłu i dającą się przez ludzki umysł jedynie postrzegać, i to postrzegać w sposób wysoce niepełny. Pogląd ten jest raczej mało popularny wśród matematyków, choć wśród wielkich matematyków zdarzają się jednak tacy, którzy go przyjmują, na przykład Hermite, który napisał kiedyś następujące zdanie:

> Il existe, si je ne me trompe, tout un monde qui est l'ensemble des vérités mathématiques, dans lequel nous n'avons accés que par l'intelligence, comme existe le monde des réalités physiques; l'un et l'autre indépendants de nous, tous deux de création divine (Darboux, 1912, s. 142)[30].

Przełożył Marcin Poręba[*]

BIBLIOGRAFIA

Carnap, R. (1935). Formalwissenschaft und Realwissenschaft. *Erkenntnis*, *5*, 30–37.
Carnap, R. (1937). *The logical syntax of language*, Oxford: Harcourt, Brace.

[30] „Istnieje, jeśli się nie mylę, cały świat będący zbiorem prawd matematycznych, do którego mamy dostęp wyłącznie za sprawą naszej inteligencji, tak samo jak istnieje świat złożony z przedmiotów fizycznych; oba światy są od nas niezależne i stanowią twór boski".

[*] Uniwersytet Warszawski, Instytut Filozofii, e-mail: m.poreba@uw.edu.pl, ORCID: 0000-0002-8843-0894.

Bernays, P. (1935). Sur le platonisme dans les mathématiques. *L'Enseignement Mathématique*, *34*, 52–69.

Bernays, P. (1935b). Quelques points essentiels de la métamathématique. *L'Enseignement Mathématique*, *34*, 70–95.

Bernays, P. (1941). Sur les questions métodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration. W : F. Gonseth (red.), *Les Entretiens de Zurich sur les fondements el la méthode des sciences malhématiques, 6-9 décembre 1938* (s. 144–152). Zurich: Leemann.

Darboux, G. (1912). *Éloges académiques et discours*. Paris: Librairie scientifique A. Hermann et fils.

Gentzen, G. (1937). Unendlichkeitsbegriff und Widerspruchsfreiheit der Mathematik. *Actualités scientifiques et industrielles*, *535*, 201–205.

Gödel, K. (1995). Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications. W: S. Feferman i in. (red.), *Kurt Gödel: Collected Works, Vol. III* (s. 304–323). Oxford: Oxford University Press.

Hahn, H. (1935). Logique, mathématiques et connaissance de la réalité. *Actualités scientifiques et industrielles*, *226*.

Hilbert, D., Bernays, P. (1934). *Grundlagen der Mathematik, Vol. I*. Springer, Berlin.

Menger, K. (1930). Der Intuitionismus. *Blätter für deutsche Philosophie*, *4*, 311–325.

Ramsey, F. P. (1926). The Foundations of Mathematics. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *s2–25*(1), 338–384.

Rosser, B. (1936). Extensions of Some Theorems of Gödel and Church, *The Journal of Symbolic Logic*, *1*(3), 87–91.

Studia Semiotyczne, t. XXXII, nr 2 (2018), s. 33–50
ISSN 0137-6608, e-ISSN 2544-073X
DOI: 10.26333/sts.xxxii2.03
Rozprawa

Thomas Bedürftig*, Roman Murawski**

PHENOMENOLOGICAL IDEAS IN THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS. FROM HUSSERL TO GÖDEL

Summary: The paper is devoted to phenomenological ideas in conceptions of modern philosophy of mathematics. Views of Husserl, Weyl, Becker and Gödel will be discussed and analysed. The aim of the paper is to show the influence of phenomenological ideas on the philosophical conceptions concerning mathematics. We shall start by indicating the attachment of Edmund Husserl to mathematics and by presenting the main points of his philosophy of mathematics. Next, works of two philosophers who attempted to apply Husserl's phenomenological ideas to the philosophy of mathematics, namely Hermann Weyl and Oskar Becker, will be briefly discussed. Lastly, the connections between Husserl's ideas and the philosophy of mathematics of Kurt Gödel will be studied.[1]

Key words: mathematics, philosophy, phenomenology, intuition.

Husserl's Philosophy of Mathematics

Husserl came in a certain sense from mathematics. He began his studies of mathematics at the universities of Leipzig and Berlin with Carl Weierstraß and Leopold Kronecker. In 1881 he moved

* Leibniz Universität Hannover, Institut für Didaktik der Mathematik und Physik. E-mail: th.beduerftig@gmx.de.
** Adam Mickiewicz University, Faculty of Mathematics and Comp. Sci. E-mail: rmur@amu.edu.pl. ORCID: 0000-0002-2392-4869.

[1] We would like to thank both anonymous referees for helpful comments and suggestions.

to Vienna where he studied with Leo Königsberger and, in 1883 obtained his doctor's degree on the base of the dissertation *Beiträge zur Variationsrechnung*. Strongly impressed by the lectures of Franz Brentano (1838–1917) on psychology and philosophy which he attended at the University of Vienna, he decided after the doctorate to dedicate his life to philosophy. In 1886 he went to the University of Halle to obtain his *Habilitation* with Carl Stumpf, a former student of Brentano. The *Habilitationsschrift* was entitled Über *den Begriff der Zahl. Psychologische Analysen*. This 64-page work was later expanded into a book (of five times the length), which was one of Husserl's major works: *Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen* (Husserl, 1891, cf. also Husserl, 1970, 2003).

Working as *Privatdozent* at the University of Halle, Husserl came into contact with mathematicians: Georg Cantor, the founder of set theory and Hermann Grassmann's son, also Hermann. The former, with whom he had long philosophical conversations when they were teaching together in Halle in the 1890s, told him about Bernard Bolzano. In fact, Husserl was perhaps the first philosopher outside Bohemia to be influenced significantly by Bolzano (cf. Grattan-Guinness, 2000). Later, as a professor of the University in Göttingen, Husserl had contact with David Hilbert and as a professor in Freiburg (Breisgau), where he was appointed in 1916, with Ernst Zermelo.

Cantor influenced in a certain sense the earlier works of Husserl though he is quoted only twice in Husserl's *Habilitationsschrift*. Similarly, discussions with Gottlob Frege – the founder of logicism, one of the main trends in the modern philosophy of mathematics – influenced him.[2] Both Cantor and Frege will appear below when we shall describe Husserl's philosophy of arithmetic. Considering the connections of Husserl with mathematics and mathematicians, one can say that his philosophy had, in fact, no visible meaning for the mathematics of his time, however, on the contrary, mathematics strongly influenced his philosophy.

One of the mathematical motives of Husserl's philosophy can be recognized in Weierstraß's program of arithmetization of analysis. Its aim was to found the whole of mathematics on the base of arithmetic,

[2] For trends in the philosophy of mathematics see for example Bedürftig, Murawski (2015, 2018).

and to define all its concepts in terms of arithmetical ones. Quite a lot of mathematicians of the 19th century initialized and supported this arithmetization, among them Augustin-Louis Cauchy, Bernard Bolzano, Richard Dedekind, Georg Cantor and Carl Weierstraß himself. Husserl's aim was to justify the Weierstraß program by his investigations, philosophically and psychologically. In the Preface to *Philosophie der Arithmetik* he wrote (Husserl, 1891, p. VIII): "Perhaps my efforts should not be wholly worthless, perhaps I have succeeded in preparing the way, at least on some basic points, for the true philosophy of the calculus, that desideratum of centuries".

Aspects of phenomenological methods and basic concepts of phenomenology can already be seen in Husserl's *Habilitationsschrift*. The latter, as well as his book *Philosophie der Arithmetik,* was influenced by Brentano and stamped by his descriptive psychology. Later Husserl moved away from this "psychologism" and criticized the psychological point of view in the philosophy of logic and mathematics – for example in the first volume of his *Logische Untersuchungen* (1900–1901).[3] He was of the opinion that phenomenological data are correctly described by empirical psychology. He changed his mind around 1930 claiming now that there is in fact no direct connection and that psychological analysis cannot be used in phenomenology. This purely philosophically and *a priori* treated phenomenology that should remove psychology as its foundation was developed by Husserl for more than forty years. His aim was to establish philosophy as a strict science and to create the universal foundation of all disciplines.

Mathematics was for Husserl a typical example of an eidetic discipline. According to him, mathematics studies the fundamental objects, like numbers in the arithmetic and forms or similar phenomena in the geometry.[4] Husserl claimed that one can penetrate in a kind of *Wesensschau* to their essences, their *eidos* – as in the case of physical

[3] However some forms of psychologism which he analysed there and tried to reject can be seen not directly in his *Philosophie der Arithmetik*. There are, however, some concepts that appear and are considered both in *Philosophie der Arithmetik* und in *Logische Untersuchungen* but they are treated in a different way. For example in *Philosophie der Arithmetik* an important role is played by the concept of abstraction taken from the psychological point of view. The same term is present in *Logische Untersuchungen* together with a sophisticated theory and many possible variants.

[4] It is worth noting here that Husserl proposed an extension of geometry in the direction called today topology.

objects. He made here no difference. Mathematics, as an eidetic discipline, studies abstract objects in which intentionally is more than we can recognize in our normal cognition and to which we will be phenomenologically led back.

Husserl was not satisfied with the solutions of the program of arithmetization proposed by Dedekind, Cantor and others. His own position, especially in *Philosophie der Arithmetik* was resolutely anti-axiomatic. According to him, one should not found "arithmetic on a sequence of formal definitions, out of which all the theorems of that science could be deduced purely syllogistically" – as he wrote in *Philosophie der Arithmetik* (1891, p. 130, 2003, p. 127). As soon as one comes to the ultimate, elementary concepts, the whole process of defining has to come to an end and one should point to the concrete phenomena from or through which the concepts are abstracted and to show the nature of the abstraction process.

He wrote:

> Today there is a general belief that a rigorous and thoroughgoing development of higher analysis […] excluding all auxiliary concepts borrowed from geometry, would have to emanate from elementary arithmetic alone, in which analysis is grounded. But this elementary arithmetic has, as a matter of fact, its sole foundation in the concept of number; or, more precisely put, it has it in that never-ending series of concepts which mathematicians call "positive whole numbers". […] Therefore, it is with the analysis of the concept of number that any philosophy of mathematics must begin (Husserl, 2003, pp. 310–311).

In *Philosophie der Arithmetik*, Husserl referred, as mentioned above, to Brentano's method of descriptive psychology and understood – similarly to Weierstraß and other mathematicians of that time – natural numbers by empirical counting, what by him is masked by other principles. In the first part of the work, Husserl developed a psychological analysis that started from the everyday concept of a number. The analysis begins with the development, application and appearance of numbers and on this base he tries to explain the psychological origin of numbers. He claims that the fundamental concept of a number cannot be defined:

> […] the difficulty lies in the phenomena, in their correct description, analysis and interpretation. It is only with reference to the phenomena that insight into the essence of the number concept is to be won (Husserl, 1891, p. 142, 2003, p. 136).

These words exhibit Husserl's psychological belief from this period. We find here already the "reference to the phenomena".

Since our intellect and time are bounded, we are able to achieve the comprehension only of a very small part of mathematics. In order to overcome those limits one introduces symbols which accompany and guide our thinking. Almost all we know about arithmetic we know indirectly *via* the intermediation of symbols. This explains why in the second part of *Philosophie der Arithmetik* Husserl considers extensively the symbolic representations.

As indicated above Husserl – being against the axiomatic approach to the characterization of numbers – claimed that the challenge is to find the sources of the number concept, to comprehend the nature of the abstraction process and to describe the concept formation. According to that one should focus on "our grasp of the concept of number" and not on the number as such.

Husserl understands abstraction in the following way: "to abstain from something or abstract from something means simply: not notice this especially". And he explains: abstraction "does not have the effect that its content and its connections disappear from our consciousness" (Husserl 1891, p. 85, 2003, p. 83). It is here psychologically indicated what Husserl later included into his method of phenomenological reduction. That there are contents that are "not especially noticed" – just they make possible the *Colligieren*, the connecting to a new whole.

This *Colligieren*, which leads to "multiplicities", is for Husserl directly connected with the concept of number. This is one of two principles that are fundamental for numbers. The second principle is the principle of "something" underlying everything. "The »something« is no abstract partial content" of any »concrete multiplicity«. For »the concept of something is due to the reflection on the psychic act of conception« (Husserl, 1891, p. 86, 2003, p. 84). Again one can suppose that here – psychological, intentional something – presages the later philosophical eidos.

By such copies of something general, multiplicities are constituted: "A multiplicity is nothing more than: something and something and something etc.; or any one and any one and any one etc.; or briefly: one and one and one etc." (Husserl, 1891, p. 85, 2003, p. 83). In the word "one" Husserl sees the relation of "partial content" with the whole of the multiplicity that is not expressed in "something".

Multiplicity and quantity (*Anzahl*) – and here we are at Husserl's concept of number – can be hardly distinguished. "It is *a priori* apparent that they coincide in their essential content" (Husserl, 1891, p. 89). "Quantity" is the "generic term": the concept of quantity distinguishes the "abstract forms of multiplicities", cancels the "vague indefiniteness" of multiplicities and appends to them the "sharply definite how many" (*loc. cit.*). Multiplicity for Husserl resembles the "something" of number, an indefinable psychological datum (cf. Husserl, 1891, p. 130, 2003, p. 127).

The essential element of the abstraction that leads to the just mentioned concept of quantity is in the concept of "something" (cf. Husserl, 1891, p. 129, 2003, p. 128). It spares – differently as in the case of the set-theoretical concept of a cardinal number – the comparison of "concrete multiplicities", which Husserl explicitly notices. Husserl's concept of quantity comes back to the age-old "definition" of a number by Euclid and corresponds to Cantor's characterization of cardinal numbers stating that it is "a definite aggregate composed of units" (Cantor, 1895, p. 482). We recognize that with Husserl one has to do here with a process which goes like a counting: "One and one and one etc.". He treats numbers as arising and given additively, for example "three" as "one, one and one" (p. 87). The counting process is so explicit and clear in this formulation that it seems that Husserl does not separate quantity and counting. At least in such a way he articulates it in his (very sharp and not consistent) critique of Kant's concept of schemata (cf. Kauferstein, 2006, p. 108 ff.):

> Number is the idea of a universal procedure of imagination getting the concept of quantity an image. However this procedure can only mean counting. But is it not clear that "number" and the idea of "counting" are the same (Husserl, 1891, p. 86, 2003, p. 84)?

This remark is a bit surprising because just at that time Dedekind (1888) and Peano (1889) provided a clear mathematical separation of number and quantity, the grounding of the concept of number by counting. It seems as if the mathematician Husserl did not want to notice this in his psychological, anti-axiomatic attitude. One can briefly characterize Husserl's concept of number by saying that, according to him, numbers are quantities, and quantities are distinguished multiplicities of abstract units.

Just these quantities are for Husserl primary for the concept of number. On the other hand, cardinal numbers as classes of equipollent sets are unfinished and “useless concept formations” (Husserl, 1891, p. 129) which state no number, but only the equality of number or quantity. This “definition” (Husserl himself puts this in quotation marks) is “considerably appreciable” (Husserl, 1891, p. 130 f.) only for “this Wildman” on “that level of mind” for whom the symbolic counting is not available.

In our opinion Husserl misunderstands both Cantor (in favor of him) as well as Frege, and finally also Dedekind. Note that he criticizes only the decided anti-psychologist Frege.

According to Husserl, a mathematician operates not with abstract numbers but with quantities that are always connected with the idea of special sets via multiplicities.

Mathematics itself is for Husserl a formal ontology. Objects investigated by mathematics are formal categories in various forms – and they are themselves not perceivable. Numbers are here an example. Thanks to the ability of categorical abstraction we can free ourselves from the empirical components of judgements and concentrate ourselves on the formal categories. In the eidetic intuition and variation we are able to grasp the possibility, impossibility, necessity and contingency of connections between concepts or between formal categories. The categorical abstraction and the eidetic intuition form the base of the mathematical knowledge.

Comparing Husserl and Frege one sees that for the former a direct experience, i.e., perception, is the ultimate basis for the meaningful analysis of numbers (and other mathematical notions), whereas the latter relies on the certainty given by logic. Husserl wants only to describe our experiences. Frege’s logical analysis consists in constructing a notion of number in the ideography. For Husserl, such an approach is artificial or, as he says, “chimerical” (cf. Husserl, 1970, pp. 119–120, 2003, p. 125). He claims that one should analyze concepts as they are given to us.

Weyl's and Becker's Phenomenological Philosophy of Mathematics

The ideas of Husserl found response in papers of the famous German mathematician Hermann Weyl (1885–1955). His interests in philosophy go back to his graduate student days between 1904 and 1908 and his allegiance to it lasted till the early twenties. A few years after the publication of *Das Kontinuum* (1918), Weyl joined the intuitionistic camp of L.E.J. Brouwer and developed his own approach to intuitionism, claiming that philosophy and intuitionism are strongly connected. Later, Weyl changed his views again and legitimated Hilbert's program. All this was connected with his critique of phenomenology. Mancosu and Ryckman (2005, p. 242) claim that "[a]pparently failing to discriminate between the resources available to phenomenology and those of intuitionistic mathematics in accounting for a contentual *Anschauung* capable of grounding the meaning of mathematical statements, Weyl saw the failure of the latter, in the face of Hilbert's finitism, as implicating the failure of the former." Weyl wrote:

> If Hilbert's view prevails over intuitionism, as appears to be the case, *then I see in this a decisive defeat of* the *philosophical attitude of pure phenomenology*, which thus proves to be insufficient for the understanding of creative science even in the area of cognition that is most primal and most readily open to evidence – mathematics [original emphasis] (1967, p. 484).

The influence of Husserl's ideas on Weyl can be seen in the care with which he treated issues like the relationship between intuition and formalization (cf. Weyl, 1918), the connection between his construction postulates and the idea of a pure syntax of relations, the appeal to a *Wesensschau*, etc. In the Preface to the work *Das Kontinuum* Weyl explicitly declares that he agrees with the conceptions that underlie Husserl's *Logische Untersuchungen* with respect to the epistemological side of logic. Answering Husserl's gift of the second edition of *Logische Untersuchungen* to him and his wife, he wrote in a letter to Husserl:

> You have made me and my wife very happy with the last volume of the *Logical Investigations*; and we thank you with admiration for this present. […] Despite all the faults you attribute to the *Logical Investigations* from your present standpoint, I find the conclusive results of this work – which has rendered such an enormous service to the spirit of pure objectivity in epistemology - the

> decisive insights on evidence and truth, and the recognition that "intuition" [*Anschauung*] extends beyond sensual intuition, established with great clarity and conciseness (Husserl, 1994, p. 290).

On the other hand Husserl read Weyl's *Das Kontinuum* as well as his *Raum, Zeit, Materie* (1922), and found them close to his views. He stressed and praised Weyl's attempts to develop a philosophy of mathematics on the base of logico-mathematical intuition. Husserl was pleased to have Weyl – who was a prominent mathematician – on his side. In a private correspondence he wrote to Weyl that his works were being read very carefully in Freiburg and had had an important impact on new phenomenological investigations, in particular those of his assistant – Oskar Becker.

Oskar Becker (1889–1964) studied mathematics at Leipzig and wrote his doctoral dissertation in mathematics under Otto Hölder and Karl Rohn in 1914. He then devoted himself to philosophy and wrote his *Habilitationsschrift* on the phenomenological foundations of geometry and relativity under Husserl's supervision in 1923. He admitted that it was Weyl's work that made a phenomenological foundation of geometry possible. Becker became Husserl's assistant in the same year. In 1927, he published his major work *Mathematische Existenz* (1927). The book was strongly influenced by Heidegger's investigations, in particular by his investigations on the facticity of *Dasein*. This led Becker to pose the problem of mathematical existence within the confines of human existence. He wrote: "The factual life of the mankind [...] is the ontical foundation also for the mathematical" (Becker, 1927, p. 636). This standpoint in the philosophy of mathematics led Becker to find the origin of mathematical abstractions in *concrete* aspects of human life. In this way he became critical of Husserl's style of phenomenological analysis. This anthropological current played an important rôle in Becker's analysis of the transfinite. Hence, Becker utilized not only Husserl's phenomenology but also Heideggerian hermeneutics, in particular discussing the infinity of arithmetical counting as "being towards death" (*Sein-zum-Tode*).[5]

---

[5] Note that being (since 1923) an assistant of Husserl, Becker was attending seminars by Heidegger. This can explain the influence of the latter on Becker's *Mathematische Existenz*. Add that *Mathematische Existenz* and Heidegger's *Sein und Zeit* were published in 1927 in the same issue of *Jahrbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung*.

At the end of his life, Becker re-emphasized the distinction between intuition of the formal and Platonic realm as opposed to the concrete existential realm and developed his own approach to the phenomenology called by him *mantic*. With this word he referred to the fact that there is a divinatory aspect related to any attempt to understand *Natur*. In the light of this mathematics appears as a divinatory science which by means of symbols allows us to go beyond what is accessible. Mantic phenomenology will have to replace the older "eidetic" phenomenology.

Becker's works have not had great influence on later debates in the foundations of mathematics, despite the many interesting analyses included in them, in particular of the existence of mathematical objects.

Talking about Weyl and Becker one should mention also Felix Kaufmann (1895–1949), an Austrian-American philosopher of law. He studied jurisprudence and philosophy in Vienna, and from 1922 till 1938 (when he left for the USA) he was a *Privatdozent* there. He was associated with the Vienna Circle. He wrote on the foundations of mathematics attempting, along with Weyl and Becker, to apply the phenomenology of Husserl to constructive mathematics. His main work here is the book *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung* (1930).

Gödel's Philosophy of Mathematics *versus* Phenomenology

One of the most eminent logicians and philosophers of mathematics in whom we find Husserl's phenomenological ideas is Kurt Gödel (1906–1978). Let us start by noting that Husserl never referred to Gödel. In fact he was more than 70 years old when Gödel obtained his great results on incompleteness and consistency, and he died a few years later, in 1938. It is claimed, however (cf. Hartimo, 2017), that he knew of Gödel's results. Also Gödel never referred to Husserl in his published works. However his *Nachlass* shows that he knew Husserl's work quite well and appreciated it highly.

Gödel started to study Husserl's works in 1959 and became soon absorbed by them finding the author quite congenial. He owned all Husserl's main works.[6] The underlinings and comments (mostly

[6] He owned among others Logische Untersuchungen (in the edition from 1968), Ideen, Cartesianische Meditationen und Pariser Vorträge, Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänemenologie.

in Gabelsberger shorthand) in the margin indicate that he studied them carefully. Most of his comments are positive and expand upon Husserl's points, but sometimes he is critical. One should note that Gödel expressed philosophical views on mathematics similar to those of Husserl long before he started to study them (cf. Føllesdal, 1995, p. 428). Views found in Husserl's writings were not radically different from his own. It seems that what impressed him was Husserl's general philosophy which would provide a systematic framework for a number of his own earlier ideas on the foundations of mathematics. Hao Wang (1996, p. 166) writes that "Gödel's own main aim in philosophy was to develop metaphysics – especially, something like the monadology of Leibniz transformed into exact theory – with the help of phenomenology".

Gödel considered both central questions in the philosophy of mathematics: (1) what is the ontological status of mathematical entities, and (2) how do we find out anything about them? Considering the first problem, one should say that Gödel had held realist views on mathematical entities since his student days (cf. Wang, 1974, pp. 8–11) – more exactly since 1921–1922. In *Russell's mathematical logic* he wrote about classes and concepts:

> It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence. They are in the same sense necessary to obtain a satisfactory systems of mathematics as physical bodies are necessary for a satisfactory theory of our sense perceptions and in both cases it is impossible to interpret the propositions one wants to assert about these entities as propositions about the "data", i.e., in the latter case the actually occurring sense perceptions (Gödel, 1944).

Similar views were expressed by him in his Gibbs lecture (1951/1995) and in the unfinished contribution to the book *The Philosophy of Rudolf Carnap* titled *Is mathematics syntax of language?* (Gödel, 1953/1995). He writes there about concepts and their properties:

> Mathematical propositions, it is true, do not express physical properties of the structures concerned [in physics], but rather properties of the *concepts* in which we describe those structures. But this only shows that the properties of those concepts are something quite as objective and independent of our choice as physical properties of matter. This is not surprising, since concepts are composed of primitive ones, which, as well as their properties, we can create

as little as the primitive constituents of matter and their properties (Gödel, 1953/1995, p. 9).

It should be stressed that Gödel does not claim here the objective existence of properties, but says only that they are as objective as the physical properties of matter. Compare this with Husserl's claim that abstract objects of mathematics have – like other essences – the same ontological status as physical objects, that they are objective, but not in the straightforward realist sense (cf. Føllesdal, 1995, p. 432, 439).

The comparison of the status of mathematical objects and physical objects one finds also in Supplement to the second edition of Gödel's paper *What is Cantor's Continuum Problem?* where he says (cf. Gödel, 1947/1964, p. 272) that the question of the objective existence of the objects of mathematical intuition is an exact replica of the question of the objective existence of objects of the outer world. Føllesdal (1995, p. 440) notes that "Gödel's use of the phrase »exact replica« brings to mind the analogy Husserl saw between our intuition of essences in *Wesensschau* and of physical objects in perception".

Let us turn now to the second problem, i.e., to the epistemology of mathematics. As indicated above in *Russell's mathematical logic* (1944), Gödel talked about elementary mathematical evidence or mathematical "data" and compared it to sense perception. The notion of mathematical intuition was also discussed by him in the papers (1951/1995) and (1953/1995) quoted above. In 1951 he wrote:

What is wrong, however, is that the *meaning* of the terms (that is, concepts they denote) is asserted to be something manmade and consisting merely in semantical conventions. The truth, I believe, is that these concepts form an objective reality of their own, which we cannot create or change, but only *perceive* and describe (Gödel, 1951/1995, p. 320).

In 1953 he writes:

The similarity between mathematical intuition and physical sense is very striking. It is arbitrary to consider "This is red" an immediate datum, but not so to consider the proposition expressing modus ponens or complete induction (or perhaps some simpler propositions from which the latter follows). For the difference, as far as it is relevant here, consists solely in the fact that in the first case a relationship between a concept and a particular object is perceived, while in the second case it is a relationship between concepts (Gödel, 1953/1995, p. 359).

In the Supplement to the second edition of *What is Cantor's Continuum Problem?* he writes:

> But despite their remoteness from sense experience, we do have something like a *perception* of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e., in mathematical *intuition*, than in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them [...] (Gödel, 1947/1964, p. 271).

Gödel did not explain what is the object of mathematical intuition. There are the following possibilities: propositions (cf. Gödel, 1953/1995), concepts (cf. Gödel, 1951/1995), sets and concepts (Gödel, 1947/1964), or all three. Recall that Husserl distinguished two kinds of intuition: perception (where physical objects are intuited) and eidetic intuition (where the object is an eidetic entity or a "something" according to his *Philosophie der Arithmetik*) and claimed that the latter is more basic. It is not clear whether Gödel shared his views in this respect.

It is worth quoting still one passage from the second edition of (Gödel, 1947/1964) where he wrote:

> That something besides the sensations actually is immediately given follows (independently of mathematics) from the fact that even our ideas referring to physical objects contain constituents qualitatively different from sensations or mere combinations of sensations, e.g., the idea of object itself. [...] Evidently the "given" underlying mathematics is closely related to the abstract elements contained in our empirical ideas. It by no means follows, however, that the data of this second kind, because they cannot be associated with actions of certain things upon our sense organs, are something purely subjective, as Kant asserted. Rather they, too, may represent an aspect of objective reality, but, as opposed to the sensations, their presence in us may be due to another kind of relationship between ourselves and reality (p. 271).

Føllesdal (1995, p. 442) suggests that Gödel's point in this passage is that "what is given in our experience is not just physical objects, but also various abstract features that are instantiated by these objects".

Mathematical intuition cannot guarantee us certainty of our knowledge. In fact neither perception nor categorical intuition are infallible sources of evidence. Gödel writes about four different methods one can use to get insight into mathematical reality:

- elementary consequences,
- success, i.e., fruitfulness in consequences,
- clarification,
- systematicity.

The first one is involved in the situation when recondite axioms have elementary consequences, e.g., axioms concerning great transfinite numbers can have consequences in the arithmetic of natural numbers. Clarification refers to situations when a discussed hypothesis cannot be solved generally, but it is solvable with the help of some new axioms (compare the problem of the continuum hypothesis and the axiom of constructibility). The last, systematicity, refers to the method of arranging the axioms in a systematic manner what enables us to discover new ones.

The last method (that recalls Husserl's "reflective equilibrium" approach to justification) was mentioned by Gödel in the manuscript *The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy* (1961/1995). Gödel described there in philosophical terms the development of the study of the foundations of mathematics in the 20th century and fitted it into a general scheme of possible philosophical *Weltanschauungen*. Among others he discussed also Husserl's philosophy, finding in it the method for the clarification of meaning of mathematical concepts.[7] He wrote there:

> […] it turns out that in the systematic establishment of the axioms of mathematics, new axioms, which do not follow by formal logic from those previously established, again and again become evident. It is not at all excluded by the negative results mentioned earlier that nevertheless every clearly posed mathematical yes-or-no question is solvable in this way. For it is just this becoming evident of more and more new axioms on the basis of the meaning of the primitive notions that a machine cannot imitate (Gödel, 1961/1995, p. 385).

Gödel refers here to his famous incompleteness results from (1931). They state that (1) every consistent theory containing the arithmetic of natural numbers contains undecidable propositions and that (2) no such theory can prove its own consistency. Those results showed that neither Hilbert's program of justification of the classical mathematics by means of finitary methods, nor Carnap's syntactical

[7] This is the only place in which Gödel mentions explicitly Husserl and his philosophy.

program reducing mathematics to its syntax, can be realized. Hence the rôle of mathematical intuition, which can help us to find out deeper meaning and properties of mathematical concepts that are not included in definitions given by axioms. Gödel says in (1961/1995) that there "exists today the beginning of a science which claims to possess a systematic method for such clarification of meaning, and that is the philosophy founded by Husserl". And he continues:

> Here clarification of meaning consists in concentrating more intensely on the concepts in questions by directing our attention in a certain way, namely, onto our own acts in the use of those concepts, onto our own powers in carrying out those acts, etc. In so doing, one must keep clearly in mind that this philosophy is not a science in the same sense as the other sciences. Rather it is [or in any case should be] a procedure or technique that should produce in us a new state of consciousness in which we describe in detail the basic concepts we use in our thought, or grasp other, hitherto unknown, basic concepts (Gödel, 1961/1995, p. 383).

This path of Gödel's from the incompleteness results to philosophy is not surprising. In a sense, the incompleteness theorems support and are supported by phenomenological views. They support philosophy because they suggest that an intuition of mathematical essences or a grasp of abstract concepts that cannot be understood on the basis of axioms alone is required in order to solve certain problems and to obtain consistency proofs for formal theories. On the other hand, they are supported by philosophy because the latter gives mathematical essences their due. Gödel claimed that it is necessary to ascend to stronger, more abstract principles and axioms to be able to solve problems from the lower levels (for example to set theoretic principles to solve number theoretic problems). This idea was strongly supported by the results of Paris, Harrington and Kirby which provided examples of genuine mathematical statements that refer only to natural numbers, that are undecidable in number theory, but that can be solved by using infinite sets of natural numbers.[8]

In the paper *The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy* (1961/1995) Gödel says also that it is not excluded that every clearly formulated mathematical yes-or-no question can be solved through cultivating our knowledge of abstract concepts,

[8] Cf. Paris, Harrigton (1977) and Kirby, Paris (1982). See also Murawski (1984).

through developing our intuition of essences. In fact in this way more and more new axioms become evident on the basis of the meaning of the primitive concepts that a machine, i.e., a formal procedure, cannot emulate.

It seems that Gödel settled on Husserl's philosophy because according to it we are directed toward and have access to essences in our experience – and this is a support for platonism which was Gödel's favorite conception in the philosophy of mathematics.

Conclusion

Husserl's post-psychologistic, transcendental view of mathematics is still a live option in the philosophy of mathematics. As Tieszen writes it is "compatible with the post-Fregean, post-Hilbertian and post Gödelian situation in the foundations of mathematics" (cf. Tieszen, 1994, p. 335). The phenomenological approach to the philosophy of mathematics is still being developed by various authors. The starting point for their considerations are, however, not directly Husserl's works but rather Gödel's considerations. Let us mention here, for example, P. Benacerraf, Ch. Chihara, P. Maddy, M. Steiner, Ch. Parsons and R. Tieszen. They are commenting on Gödel's works concentrating in particular on the problem of mathematical intuition – cf., for example, Maddy (1980), Parsons (1980) or Tieszen (1988).

REFERENCES

Becker, O. (1927). Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene. *Jahrbuch für Philosophie und phänemenologische Forschung*, *8*, 439–809.

Bedürftig, Th., Murawski, R. (2015). *Philosophie der Mathematik* (3rd edition). Berlin/Boston: Walter de Gruyter.

Bedürftig, Th., Murawski, R. (2018), *Philosophy of Mathematics*. Berlin/Boston: Walter de Gruyter.

Cantor, G. (1895). Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, *46*, 481–512.

Føllesdal, D. (1995). Gödel and Husserl. In: J. Hintikka (Ed.), *Essays on the Development of the Foundations of Mathematics* (pp. 427–446). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme. I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, *38*, 173–198.

Gödel K. (1944). Russell's Mathematical Logic. In: P. A. Schilpp (Ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell* (pp. 123–153). Evanston: Northwestern University. Reprinted in: K. Gödel, *Collected Works*, vol. II, ed. by S. Feferman *et al.*, New York-Oxford 1990: Oxford University Press, 119–141.

Gödel, K. (1947/1964). What is Cantor's Continuum Problem? *The American Mathematical Monthly*, *54*, 515–525. Second revised version in: P. Benacerraf and H. Putnam (Eds.), *Philosophy of Mathematics. Selected Readings* (pp. 258–273). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Gödel, K. (1951/1995). Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications, first published in: S. Feferman et al. (Eds.), *Collected Works*, vol. III (pp. 304–323). New York and Oxford: Oxford University Press.

Gödel, K. (1953/1995). Is Mathematics Syntax of Language? (unfinished contribution), first published in: S. Feferman et al. (Eds.), *Collected Works*, vol. III (pp. 334–362). New York and Oxford: Oxford University Press.

Gödel, K. (1961/1995). The Modern Development of the Foundations of Mathematics in the Light of Philosophy, first published (German text and English translation) in: S. Feferman et al. (Eds.), *Collected Works*, vol. III (pp. 374–387). New York and Oxford: Oxford University Press.

Grattan-Guinness, I. (2000). *The Search for Mathematical Roots 1870–1940. Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*. Princeton and London: Princeton University Press.

Hartimo, M. (2017). Husserl and Gödel's Incompleteness Theorems. *Review of Symbolic Logic*, *10*(4), 638–650.

Husserl, E. (1891). *Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen,* Halle-Saale: C. E. M. Pfeffer.

Husserl, E. (1900–1901), *Logische Untersuchungen* (Vol. 1–2). Halle: Niemeyer.

Husserl, E. (1970). *Philosophie der Arithmetik. Mit Ergänzenden Texten (1890–1901)*. The Hague: Martinus Nijhoff.

Husserl, E. (1994). *Edmund Husserl Briefwechsel. Band VII: Wissenschaftskorrespondenz*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Husserl, E. (2003). *Philosophy of Arithmetic. Psychological and Logical Investigations with Supplementary Texts from 1887–1901. Collected Works*, vol. X. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kauferstein, C. (2006). *Transzendentalphilosophie der Mathematik*. Stuttgart: ibidem-Verlag.

Kaufmann, F. (1930). *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung*. Leipzig and Vienna: Franz Deuticke.

Kirby L., Paris J. (1982). Accessible Independence Results for Peano Arithmetic. *Bulletin of London Mathematical Society*, *14*(4), 285–293.

Maddy, P. (1980). Perception and Mathematical Intuition. *The Philosophical Review*, *89*(2), 163–196.

Mancosu, P., Ryckman Th. (2005). Geometry, Physics and Phenomenology: Four Letters of O. Becker to H. Weyl. In: V. Peckhaus (Ed.), *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik* (pp. 229–243). München: Fink Verlag, 229–243.

Murawski, R. (1984). Matematyczna niezupełność arytmetyki. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria II: Wiadomości Matematyczne*, *26*, 47–58.

Paris J., Harrington L. (1977). A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic. In: J. Barwise (Ed.), *Handbook of Mathematical Logic* (pp. 1133–1142). Amsterdam: North-Holland Publ. Comp.

Parsons, Ch. (1980). Mathematical Intuition. *Proceedings of the Aristotelian Society*, *80*, 145–168.

Tieszen, R. (1988). Phenomenology and Mathematical Knowledge. *Synthese*, *75*(3), 373–403.

Tieszen, R. (1994). The Philosophy of Arithmetic: Frege and Husserl. In: L. Haaparanta (Ed.), *Mind, Meaning and Mathematics* (pp. 85–112). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wang, Hao (1974). *From Mathematics to Philosophy*. London: Routledge and Kegan Paul.

Wang, Hao (1996). *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*. Cambridge, Mass., and London, England: The MIT Press.

Weyl, H. (1918). *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Leipzig: Veit.

Weyl, H. (1922). *Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie* (5th ed.). Wien: Springer.

Weyl, H. (1967). Comments on Hilbert's Second Lecture on the Foundations of Mathematics. In: J. van Heijenoort (Ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879–1930* (pp. 480–484). Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Studia Semiotyczne, t. XXXII, nr 2 (2018), s. 51–73
ISSN 0137-6608, e-ISSN 2544-073X
DOI: 10.26333/sts.xxxii2.04
Rozprawa

Gabriela Besler*

GOTTLOB FREGE O PRAWDZIE W OKRESIE WYDAWANIA DWÓCH TOMÓW *GRUNDGESETZE DER ARITHMETIK* (1893–1903)

Streszczenie: W latach 1893 i 1903 ukazały się dwa tomy najważniejszego dzieła Fregego *Grundegezte der Arithmetik*. Ten okres można nazwać „szczytem logicyzmu" Fregego. Chociaż temat prawdy w logiczno-filozoficznej twórczości Fregego był podejmowany wielokrotnie, to brakuje pozycji skupiającej się na badaniu poglądów w tym okresie. Dotyczy to w szczególności literatury polskiej. Moim zadaniem jest zebranie i uporządkowanie wszystkich wypowiedzi Fregego na temat prawdy w okresie wydawania wspomnianych tomów. Realizując to zadanie, badam użycie tego pojęcia w pierwszym tomie *Grundegezte der Arithmetik* oraz w niepublikowanym tekście *Logik*. Podejmuję zagadnienie funkcjonowania tego terminu w szczególnych kontekstach: antynomii, geometrii i wyrażania ogólności. Na koniec zasygnalizuję kwestię sposobu rozumienia późniejszych wypowiedzi Fregego na temat prawdy.

Słowa kluczowe: Gottlob Frege, prawda, logika, wartości logiczne, myśl, logicyzm.

Wstęp

Prawda jest drugim, po liczbie, wielkim tematem filozoficznym Gottloba Fregego. W swej ponad czterdziestoletniej działalności naukowej wielokrotnie modyfikował jej koncepcję[1]. Zmiany nie miały

* Uniwersytet Śląski w Katowicach, Instytut Filozofii. E-mail: gabriela.besler@us.edu.pl. ORCID: 0000-0002-1843-5198.

[1] Więcej na ten temat zob.: Sluga (2002), Besler (2010, s. 189–201).

jednak charakteru gwałtownych zwrotów, raczej polegały na poszukiwaniu koherencji zaproponowanego rozumienia prawdy i precyzowaniu pierwotnych intuicji. Dodam, że Frege zawsze był przeciwny określaniu prawdy jako zgodności przedstawienia (czy zdania) z rzeczywistością.

W latach 1893 i 1903 ukazały się dwa tomy najważniejszego dzieła Fregego *Grundegezte der Arithmetik*. Był to okres[2], który można nazwać „szczytem logicyzmu" Fregego, okres, w którym wierzył w sukces swojego projektu i z pewnością pracował nad jego dalszym rozwojem.

Chociaż temat prawdy w logiczno-filozoficznej twórczości Fregego był podejmowany wielokrotnie, w ujęciu diachronicznym (Sluga, 2002) i synchronicznym (Burge, 2005; Dummett, 1981; Greimann, 2003a, 2003b, 2007), to brakuje pozycji skupiającej się na badaniu poglądów w szczytowym okresie rozwoju logicyzmu Fregego. W literaturze można znaleźć jedynie rozproszone uwagi, skupiające się na prawdzie jako wartości logicznej, a temat wart jest szerszego spojrzenia. W tym artykule stawiam więc następujące zadanie badawcze: zebrać i uporządkować wszystkie wypowiedzi Fregego na temat prawdy w okresie wydawania dwóch tomów *Grundegezte der Arithmetik*. Odwołam się do tekstów opublikowanych za życia Fregego, opublikowanych pośmiertnie oraz do korespondencji z tego okresu[3]. Temat prawdy pojawia się tam w odniesieniu do logiki, filozofii języka, filozofii logiki, filozofii matematyki i ontologii.

Dorobek naukowy Fregego z lat 1893–1903 jest bardzo specyficzny. Pomiędzy dwoma tomami *Grundegezte der Arithmetik* ukazała się niewielka książeczka poświęcona liczbom w ujęciu Schuberta, rzadko wymieniana jako książka Fregego (1899/1990). Na 29 pozostałych tekstów 6 zostało opublikowanych za życia Fregego, 5 niepublikowanych

[2] Właściwie wyróżniony tu okres trwał do 16 czerwca 1902, kiedy to Frege otrzymał pierwszy list od Russella (Russell, 1902/1976) informujący go o możliwości skonstruowania antynomii na podstawie pierwszej książki Fregego (Frege, 1879/1997). Sformułowaną trudność Frege odniósł do systemu logicznego z *Grundgesetze der Arithmetik* (Frege, 1893, 1903). Więcej na ten temat w pozycji Besler (2015, s. 95–97; w druku).

[3] Z wyjątkiem jednego listu do Russella, z 1902 (Frege, 1902/1976a), żaden tekst z tego okresu nie został dotąd przetłumaczony na język polski. Na gruncie polskim znane są Fregego ujęcia prawdy sprzed tu badanego okresu i po nim, bo ukazały się polskie tłumaczenia odpowiednich tekstów (Frege, 1892/1990a; 1892/1990b; 1918–1919/1990a).

za jego życia i nieprzygotowanych przez niego do druku. Pozostałych 18 tekstów to listy, w zdecydowanej większości listy o charakterze naukowym, pisane z dużą starannością i kierowane do wybitnych naukowców tamtej epoki: Giuseppe Peana (1858–1932), Davida Hilberta (1862–1943), Heinricha Liebmanna (1847–1939), Bertranda Russella (1872–1970).

W badanym tu okresie powstały więc w sumie 32 teksty[4], nie we wszystkich jednak temat prawdy w ogóle się pojawia. Na szczególną uwagę zasługują: *Grundegezte der Arithmetik* (Frege, 1893/2009) oraz *Logik* (Frege, 1897–1898b/1983). Dlatego tym pozycjom zostaną poświęcone osobne paragrafy, a wątki dotyczące prawdy z innych tekstów zostały pogrupowane tematycznie: problem antynomii, geometria, wyrażanie ogólności, inne.

Pisma Fregego ukazują całe bogactwo pojęć związanych z prawdą. Oto terminologia typowa dla badanego tu okresu, z pierwszego tomu *Grundgesetze der Arithmetik*, wraz z liczbami występowania tych słów: prawda (*Das Wahre*, 150), prawdziwość (*Wahrheit*, 112), wartość logiczna (*Wahrheitswert*, 97), fałsz (*das Falsche*, 78), prawa prawdziwości (*Gesetze des Wahrseins*, 12). Ponadto Frege często używa także przymiotnika (predykatu) prawdziwy/fałszywy (*wahr/falsch*)[5]. Powyższa terminologia występuje także w innych pozycjach z badanego tu okresu, wyjątki będą sygnalizowane.

W pozycji zamykającej badany tu okres (Frege, 1903/2009a) powyższe słowa występują rzadziej, a sformułowań „fałsz" oraz „prawa prawdziwości" w ogóle nie ma. Wydaje się, że nie mamy tu do czynienia ze zmianą poglądów Fregego, ale z innym charakterem tej książki. W czternastostronicowym dodatku (Frege, 1903/2009b), dołączonym do już wtedy drukowanego tomu (Frege, 1903/2009a), po liście napisanym przez Russella (1902/1976a), w kontekście wprowadzenia szybkiej poprawki do systemu logicznego (Frege, 1893/2009, 1903/2009a), z powyższych słów występują (jako słowa techniczne) tylko (i to w jednym zdaniu): „prawda", „fałsz".

---

[4] Pełna bibliografia Fregego znajduje się w pozycji Besler (2010).

[5] Przyjmuję tutaj terminologię ustaloną przez Bogusława Wolniewicza (1927–2017) z wyjątkiem pisania słów „prawda" i „fałsz" z dużej litery. Ponadto nie zawsze da się konsekwentnie tłumaczyć *Wahrheit* jako „prawdziwość" (Rygalski, 2004, s. 296), z czym także borykał się Wolniewicz.

Słowa merytorycznie związane z prawdą to: przebieg wartości funkcji (*Wertverlauf*)[6], myśl (*Gedanke*), sprzeczność (*Widerspruch*), twierdzenie lub zdanie twierdzące (*Behauptungsatz*), sąd (*Urtheil*), nauka. Warto tu odnotować, że w tekście *Logik* napisanym przez Fregego w 1897–1898 (Frege, 1897–1898b/1983) nie ma wyrażenia „wartości logiczne", a w żadnym z omawianych tu tekstów (a dokładniej w żadnym tekście Fregego) nie ma wyrażenia „warunki prawdziwości" (*Wahrheitsbedingungen*), przywoływanego często przez filozofów analitycznych odnoszących się do Fregego koncepcji prawdy (Besler, 2010, s. 76).

W spuściźnie po Fregem zostały odnalezione trzy teksty, które traktuje się jako niedokończone podręczniki z logiki: jeden napisany w 1879–1891, drugi w 1897–1898b, trzeci – w 1906 (Frege, 1983). Jako części czwartego podręcznika z logiki są zaś traktowane artykuły opublikowane w ramach serii *Logische Untersuchungen*: (Frege, 1918–1919/1990a; 1918–1919/1990b; 1923/1990). Tam Frege przedstawia swe tezy na temat prawdy, myśli, sensu i znaczenia (*Bedeutung*), natury logiki, negacji oraz ogólności, co odpowiada tematyce poprzednich niedokończonych podręczników do logiki. W żadnym z wyżej wymienionych tekstów nie ma notacji logicznej Fregego, a ich tematyka mieści się w zakresie filozofii logiki.

Przyjmuje się, że tekst *Logik* został napisany w latach 1897–1898, a więc pomiędzy wydaniem dwóch tomów *Grundgesetze der Arithmetik*. Tematem wiodącym jest tam prawda, jako istotnie związana z logiką.

Wydaje się, że datowanie tego tekstu nie powinno wiązać się z żadnymi trudnościami, ponieważ Frege:

1. Podaje datę w pewnym zdaniu: „[…] 1 stycznia 1897, południe wg czasu środkowoeuropejskiego" (Frege, 1897–1898b/1983, s. 147)[7].
2. Odwołuje się do czasopisma z psychologii fizjologicznej, które ukazuje się od 1874 (s. 156).
3. Odnosi się do pewnej recenzji, napisanej w 1897 (s. 156).

[6] „Przebieg wartości funkcji" to termin techniczny Fregego, rozumiany jako zbiór wszystkich przyporządkowań argumentów z dziedziny danej funkcji do odpowiednich wartości tej funkcji (Cook, 2013, s. A-16–A-18).

[7] Tłumaczenie fragmentów niepublikowanych w języku polskim – Gabriela Besler, chyba, że podano inaczej.

Zadziwia jednak podobieństwo wielu tez dotyczących prawdy i koncepcji myśli do znacznie późniejszego tekstu (Frege, 1918–1919/1990a). Oto możliwe wyjaśnienia tej sytuacji, z każdym wiąże się kontrargument:

1. Tekst powstał znacznie później, a podana data nie była związana z dniem pisania tekstu. Może była znacząca dla Fregego z jakiegoś nieznanego nam powodu. Przeciwko temu rozwiązaniu świadczy powołanie się na recenzję z 1897.
2. Frege nie zmienił swych poglądów w okresie 20 lat lub powrócił do wcześniej wypracowanych rozwiązań. Jeśli tak, to koncepcja obiektywnej myśli jako gwaranta prawdy i fałszu byłaby o wiele wcześniejsza niż prace z okresu emerytalnego. Przeciwko temu rozwiązaniu świadczy brak powtarzania tych tez w innych pismach z tego okresu, także w listach.
3. Brak w tym tekście sformułowania „wartość logiczna", typowego dla badanego tu okresu.

Na użytek pisanego tu artykułu przyjmuję jednak, że tekst *Logik* został napisany w 1897–1898 (Frege, 1897–1898b/1983) powstał więc pomiędzy dwoma tomami *Grundgesetze der Arithmetik*.

Grundgesetze der Arithmetik (1893)

Zadaniem tej pozycji i kolejnych planowanych tomów, z których ukazał się tylko drugi (Frege, 1903/2009a), było przedstawienie arytmetyki jako rozwiniętej logiki (Frege, 1893/2009, s. VII[8]). O logice napisane zostało, że zajmuje się prawami prawdziwości, w przeciwieństwie do psychologii, która jest zainteresowana prawami myślenia (Frege, 1893/2009, s. XVI). W tym kontekście pojawia się temat prawdy, rozpatrywanej z punktu filozofii języka, oraz – wraz z fałszem – jako kategoria wykorzystywana w logice.

Filozoficzny aspekt prawdy jest przedstawiony w *Vorwort*, jednym z dwóch wprowadzeń do pierwszego tomu *Grundgesetze der Arithmetik*[9]. W tu omawianym okresie Fregego filozofia języka była już w pełni roz-

---

[8] W całym tekście podano strony odnoszą się do pierwszego wydania tej pozycji.

[9] Osobnym tematem jest, dlaczego Frege napisał dwa, treściowo różne wprowadzenia, jedno nazwane *Vorwort*, drugie *Einleitung*.

winięta, ugruntowana, raczej nie podlegała dalszym zmianom. Frege korzystał z niej do charakterystyki prawdy. Podstawą jego filozofii języka było wyróżnienie (tylko) trzech rodzajów wyrażeń językowych: zdania, nazwy własne i predykaty. Każde z tych wyrażeń posiada sens i znaczenie (rozumiane jako „obiekt", do którego odnosi się dane wyrażenie)[10]. Sensem zdania jest myśl, a jego znaczeniem jedna z dwóch wartości logicznych[11]: prawda lub fałsz.

Przedstawiając swą filozofię języka, Frege odsyła czytelnika do wcześniejszego artykułu (Frege, 1892/1990b), gdzie te tematy przedstawił najpełniej.

Do wykorzystania sensu i znaczenia w kontekście prawdy Frege doszedł także od innej strony. Treść, jako element odróżniony od uznania prawdziwości, określił on jako nadającą się do osądu i wyróżnił w niej dwa kolejne elementy (Frege, 1893/2009, s. X):

1. Myśl, która jest sensem zdania.
2. Wartość logiczna, która jest znaczeniem zdania.

Z historycznego punktu widzenia najważniejsze okazało się sformułowanie „wartość logiczna", kluczowe zarówno dla filozofii jak i logiki Fregego (a właściwie całej późniejszej logiki XX wieku). Pisał: „[…] odróżniam dwie wartości logiczne: prawdę i fałsz" (Frege, 1893/2009, s. X).

Wartości logiczne, podobnie jak liczby (*Zahl*, nie *Anzahl*[12]), były rozumiane jako abstrakcyjne przedmioty, a przedmioty charakteryzowały się tym, że w ich nazwie własnej nie było miejsca na argument (s. 7). Wszystkie zdania prawdziwe (fałszywe) odnoszą się do jednego obiektu: prawdy (fałszu). Poniżej reprezentatywne wypowiedzi Fregego w tym zakresie:

> Nazwy $2^2 = 4$ i $3 > 2$ znaczą tę samą wartość logiczną, którą krótko nazywam prawdą (s. 7).

---

[10] Więcej na temat kategorii semantycznych w *Grundegezte der Arithmetik* można znaleźć w jednym z teksów Hecka (Heck, 2010).

[11] Język wartości do filozofii wprowadzili Hermann Lotze (1817–1881) i Wilhelm Windelband (1848–1915), z którymi Frege był w kontakcie. Windelband posługiwał się sformułowaniem *Wahrheitswert*, a Lotze – *Gedanke*, rozumianymi inaczej niż w tekstach Fregego (Sluga, 2002, s. 84–85; Besler, 2010, s. 27–28, 73–81).

[12] O różnicy między *Zahl* i *Anzahl* zob. Besler (2010, s. 165–166; 2013, s. 140–142).

Funkcja $\xi^2 = 4$ może mieć dwie wartości, a mianowicie prawdę dla argumentu 2 i –2 oraz fałsz dla wszystkich innych argumentów (s. 7).

Na podstawie powyższych cytatów można powiedzieć, że każde zdanie prawdziwe jest nazwą własną obiektu, jakim jest jedna z dwóch wartości logicznych, w tym przypadku obiektem tym jest prawda. Analogicznie ze zdaniami fałszywymi. Jako przykłady zdań odnoszących się do prawdy podawał: $2 + 3 = 5$ oraz $2 = 2$. Poprawny był więc następujący zapis: $(2 + 3 = 5) = (2 = 2)$ (s. 9), gdzie znak „=" pomiędzy nawiasami pokazywał identyczność wyrażeń w nawiasach na poziomie znaczenia tych wyrażeń, ale nie na poziomie ich sensu.

W tym kontekście dodam, że funkcje (w tym także funkcje zdaniowe) nie mają wartości logicznej, bo jako wyrażenia z pewną niewiadomą są niekompletne. Wartość logiczną uzyskują dopiero po uzupełnieniu przez argument, ale wtedy formuła już nie jest funkcją. Podam przykład w odniesieniu do funkcji, jaką było pojęcie, rozumiane przez Fregego jako taka funkcja, której wartością jest jedna z dwóch wartości logicznych: prawda lub fałsz (s. 8). Na przykład pojęcie czerwieni jest właściwie funkcją „*x* jest czerwone", prawdziwą dla jednych argumentów, a dla innych fałszywą.

W tekście poświęconym porównaniu swej notacji logicznej z notacją Peana, Frege pisze następująco o związkach między tymi kategoriami: „[...] wszystkie zdania prawdziwe znaczą to samo, prawdę, a wszystkie zdania fałszywe – fałsz" (Frege, 1896/1990, s. 225). „Używam słowa «zdanie» w sensie kombinacji symboli, których sens jest myślą a znaczenie wartością logiczną: prawdą lub fałszem" (Frege, s. 227).

W filozofii języka i w logice Fregego zdanie zbudowane niepoprawnie jest fałszywe (Frege, 1893/2009, s. 10; Frege 1896/1990, s. 230). Podawał on następujący przykład: wprowadził znak na słońce ⊙ i matematycznie zapisał, że ów znak jest większy od 2: „$\odot > 2$". Tak powstałe zdanie uznał za fałszywe, bo słońce nie jest liczbą, chociaż prawdziwe jest następujące zdanie: „$(\odot > 2) \supset (\odot^2 > 2)$" (Frege, 1896/1990, s. 230). Z definicji funktora implikacji wynika bowiem, że formuła jest prawdziwa, gdy poprzednik i następnik są fałszywe.

Warto tu dodać, że nie każde poprawnie syntaktycznie zdanie ma wartość logiczną. Frege wyróżnia dwie takie sytuacje:

1. Zdanie podrzędne w mowie zależnej. Generalnie, myśl jest sensem zdania, ale w mowie zależnej myśl jest przez Fregego traktowana

jako znaczenie zdania podrzędnego (Frege, 1893/2009, s. X), a więc zdanie podrzędne, jeżeli jest zdaniem składowym zdania w mowie zależnej, jest pozbawione wartości logicznej.

2. Zdania z nazwą własną pozbawioną znaczenia np. zdania poezji (Frege, 1896/1990, s. 227); jest to zasada wyraźnie sformułowana w późniejszym tekście, ale i w tym okresie obowiązująca (Frege 1897–1898a/1983, s. 169).

Wyżej omówione poglądy Fregego pokazują, że prawda jest istotnie związana z jego koncepcją myśli. Właściwie nie tylko prawda, ale i fałsz. Frege pisał bowiem także o myślach fałszywych, jako przykłady podawał: $0^2 = 4$; $1^2 = 4$; $3^2 = 4$ (1893/2009, s. 6).

Uzupełnieniem powyższych kategorii jest myśl, o której pisał także, że jest sensem nazwy pewnej wartości logicznej (Frege, 1893/2009, s. 7). Później pisał nawet o „królestwie myśli” (Frege, 1918–1919/1990a), uznając samą myśl za pewną rzeczywistość obiektywną, niezmienną, gwarantującą możliwość uprawiania nauki, w istotny sposób związaną z logiką. Pisał tak: „Wyrażam myśli za pomocą moich znaków i podałem zestawienie ważniejszych teoremów wraz z ich przekładem” (Frege, 1893/2009, s. XI).

Prawda jest kategorią istotnie wykorzystywaną przez Fregego także w logice formalnej. Dla przykładu, prawa logiczne są nazwane prawami prawdziwości (Frege, 1893/2009, s. XVI). Niektóre z praw logicznych pełniły funkcję praw podstawowych, niedowodzonych w systemie Fregego, jednym z nich było problematyczne prawo V[13].

W okresie pisania dwóch tomów *Grundgesetze der Arithmetik* wartości logiczne są używane przez Fregego do określenia warunków prawdziwości zdań zbudowanych z funktorów i kwantyfikatorów. Wcześniej w tym kontekście Frege posługiwał się słowami: uznać (*bejahen*), zanegować (*verneinen*) (Frege, 1879/1997, s. 5)[14], a nie „prawda” i „fałsz”[15]. Poniżej te symbole logiczne, które Frege charakteryzował z odniesieniem do wartości logicznych (podaję je w kolejności wprowadzania

[13] Więcej na ten temat w paragrafie *Problem antynomii*.

[14] W wydaniu polskim s. 54. W innych przypadkach, w tekstach tłumaczonych na język polski, podane strony odnoszą się do wydania polskiego.

[15] Warto tu dodać, że Frege (obok E. Schrödera i Ch. S. Peirce’a) jest uważany za twórcę tabelek prawdziwościowych. Z kolei Schröder w tym kontekście używał słów: „jest ważne” (*es gilt*), „nie jest ważne” (*es gilt nicht*) (Marek, 1993, s. 10–11).

przez Fregego): kreska sądu, kreska pozioma, kreska negacji, znak równości, oznaczenie kwantyfikujące, kreska implikacji.

Przywołując swą pierwszą książkę (Frege, 1879/1997), pisał, że odróżnia „[…] dwie składowe w tym, czego zewnętrzną formą jest zdanie twierdzące" (Frege, 1893/2009, s. X):

1. Rozpoznanie prawdy.
2. Treść, która jest rozpoznana jako prawdziwa.

„Rozpoznanie prawdy" jest „zaznaczane" na formule logicznej poprzez dołączenie tak zwanej kreski sądu, co Frege opisał następująco:

> Potrzebujemy jeszcze pewnego szczególnego znaku, by móc o czymś twierdzić, że jest prawdziwe. W tym celu pozwolę sobie poprzedzić znakiem $\vdash$ nazwę wartości logicznej tak, że na przykład w $\vdash 2^2 = 4$ będzie stwierdzone, że kwadrat z 2 wynosi 4 (Frege, 1893/2009 s. 9; por. Greimann, 2000).

Konieczność owej kreski sądu jest dla Fregego tak oczywista, naturalna i konieczna, że w liście do Peana, z którym korespondował w tym okresie, pisał:

> Sam np. mam znak |, kreskę sądu, która służy do uznawania czegoś za prawdziwe. Pan nie ma odpowiedniego znaku, ale rozpoznaje Pan różnicę między tym przypadkiem, że wyraża się tylko pewną myśl, nie uznając jej za prawdziwą, a tym, gdzie się ją stwierdza (Frege, 1896/1976, s. 185–186).

Tak zwana kreska pozioma jest znakiem funkcji jednoargumentowej od przedmiotów, której wartością jest jedna z dwóch wartości logicznych (Frege, 1893/2009, s. 16–17). Wartością tej funkcji jest prawda, gdy argumentem jest prawda. Możliwe są jeszcze dwa inne przypadki:

1. Argumentem jest fałsz.
2. Argumentem nie jest żadna z wartości logicznych, ale np. 2 (Frege, 1893/2009, s. 10).

Wtedy wartością tej funkcji jest fałsz.

Negację (zapisywaną jako krótka kreska dołączona do kreski poziomej) określił jako wartość funkcji fałszywej dla każdego argumentu, dla której ta funkcja bez znaku negacji jest prawdziwa dla każdego argumentu (s. 10).

Wyrażenie ze znakiem równoważności odnosi się do prawdy wtedy, gdy po obu stronach tego funktora występuje wyrażenie o tej samej wartości logicznej, a fałszywe w każdym innym przypadku (s. 11).

Kwantyfikator ogólny był zapisywany przez Fregego jako wgłębienie w kresce treści wraz z literą alfabetu gotyckiego. Przyjmował, że zapis ten „Znaczy prawdę kiedy wartością funkcji $\Phi(\xi)$ dla każdego argumentu jest prawda, w przeciwnym przypadku fałsz" (s. 12).

Implikacja była zapisywana jako kreska pionowa łącząca dwie kreski poziome i charakteryzowana jako fałszywa w przypadku, gdy poprzednik jest prawdą, a następnik nie jest prawdą (s. 26).

Frege podaje jeszcze przykłady funkcji, których wartością dla każdego argumentu jest to, co fałszywe:

1. $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \top\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$ czytane jako przebieg wartości funkcji „nieprawda, że dla każdego *a*, *a* = *a*" (s. 17).
2. Przypadek połączenia znakiem równości jednej z wartości logicznych i przebiegu wartości funkcji (s. 17).

W logice Fregego prawda była także wykazywana za pomocą wynikania logicznego. W tekście napisanym między 1899 a 1906 pisał: „Prawdy [*Wahrheiten*] mogą być wywnioskowane z logicznych praw wnioskowania. Gdy mamy daną pewną prawdę [*Wahrheit*], można zapytać, z jakich innych prawd wynika jej bycie prawdziwą, zgodnie z logicznymi prawami wynikania" (Frege, 1899–1906/1983, s. 183).

Podsumowując temat prawdy u Fregego (Frege, 1893/2009), można powiedzieć, że była dla niego zarówno kategorią filozoficzną jak i użytecznym „narzędziem" do badania wartości logicznej formuł logicznych i wnioskowań oraz charakterystyki funktorów i kwantyfikatora. Wyrażana była słownie lub za pomocą kreski asercji.

Logik (1897–1898):
NIEDOKOŃCZONY PODRĘCZNIK Z LOGIKI

Ten nieopublikowany przez Fregego tekst jest wart szczególnej uwagi z paru powodów, w tym ze względu na metodę, jaką Frege się w nim posługuje: odwoływanie się do sposobów używania pojęcia „prawdziwy" w języku codziennym. Frege wymienia słowa z nim związane i słowa niemające z nim istotnego związku, chociaż na co dzień takie wyrażenia są używane. Dalej zbiera konteksty, w których to słowo występuje i odrzuca mylące, niewłaściwe jego użycia. Porównuje go pod względem językowym do innych predykatów (Frege, 1897–1898b/1983, s. 140) i wymienia różnice. Predykat „prawdziwy" nie ma nic wspólnego z przedstawieniami, a jego stosowanie w odniesieniu do cielesności jest niezasadne (s. 137, 140)[16].

Frege postuluje wyznaczyć granice zasadnej stosowalności słowa „prawdziwy". Chociaż nie formułuje on wyraźnie takiego stanowiska, na podstawie tego i innych tekstów można powiedzieć, że przede wszystkim predykat „prawdziwy" przysługuje myśli, w drugiej kolejności zdaniom, a w szczególności zdaniom twierdzącym (s. 137, 140). Zdania są bowiem „właściwym środkiem wyrazu myśli" (s. 137), a myśl jest sensem zdania (s. 137).

W języku naturalnym „prawdziwy" jest łączony także z przedstawieniem i doświadczeniem, co Frege odrzuca jako niezasadne. Pisze także, iż nie potrzebujemy słowa „prawdziwy", by powiedzieć, że przedstawienie katedry w Kolonii zgadza się z rzeczywistością. Jako zasadne użycie słowa „prawdziwy" podaje orzeczenie tej cechy o zdaniu $2 + 3 = 5$ (s. 140). Jeżeli zaś mówi się o przedstawieniach, że są prawdziwe, to właściwie ma się na uwadze myśl, której predykat jest przypisany (s. 137).

Poniżej zostaną zebrane wypowiedzi Fregego na temat słowa „prawdziwy":

Chociaż dla każdej nauki prawda jest celem, to jednak logika w szczególny sposób jest związana z predykatem „prawdziwy", podobnie jak fizyka z predykatami „ciężki" i „ciepły", a chemia z „kwaśny" i „alkaliczny" (s. 138, 139). „Słowo «prawdziwy» wyznacza cel logice, cechuje logikę" (s. 137); służy logice tak, jak „dobry" etyce, a „piękny" estetyce (s. 139). Między zdaniami logiki może zachodzić sprzeczność, między sądami dotyczącymi tego, co piękne – nie (s. 138).

Predykaty „prawdziwy" i „piękny" różnią się od siebie istotnie. To, co prawdziwe jest – jak pisze Frege – „w sobie prawdziwe" (s. 143). To, co piękne, nie jest jednak „w sobie piękne" (s. 137). Ponadto predykat „prawdziwy" nie jest stopniowany, inaczej niż „piękny" – ten da się stopniować (s. 137).

Dla Fregego logika, podobnie jak etyka, jest nauką normatywną, o najogólniejszych prawach prawdziwości (s. 139). W dalszej części tekstu pisał tak: „W logice chodzi o prawa prawdziwości, a nie o takie prawa, które są uważane za prawdziwe; [w logice] nie chodzi o pyta-

[16] Wszystkie cytaty z tej sekcji, o ile nie zaznaczono inaczej, pochodzą ze wspomnianej w śródtytule pozycji.

nie, jak przebiega ludzkie myślenie, ale o to, jak musi ono przebiegać, by nie uchybić prawdzie" (s. 161). Dlatego prawa prawdziwości są przeciwstawiane prawom myślenia i prawom sądzenia, którymi zajmuje się psychologia (s. 157–158). Ponadto, owe „[…] prawa prawdziwości, jeżeli w ogóle są prawdziwe, jak wszystkie myśli, to są zawsze prawdziwe" (s. 160).

W tu omawianym, niedokończonym podręczniku do logiki Frege po raz pierwszy wyraźnie pisze o niedefiniowalności prawdy: „Prawdziwość jest oczywiście czymś tak pierwotnym i prostym, że sprowadzenie jej do czegoś jeszcze prostszego nie jest możliwe" (s. 140). Frege prawdziwość uważa za niedefiniowalną. W takich przypadkach Frege uważał, że pozostaje jedynie „[…] naprowadzanie czytelnika lub słuchacza przez pośrednie sugestie" (Frege, 1892/1990, s. 46). W późniejszym tekście, z 1914 roku, ta czynność zostanie nazwana rozjaśnianiem (*Erläuterung*), odróżnianym od definiowania (Frege, 1914/1983, s. 224). Może nie byłoby to takie rażące, gdyby nie świadomość, że dla Fregego rozjaśnianie dokonywało się poza nauką, było zaledwie jej propedeutyką[17].

Frege wiele miejsca poświęcił koncepcji myśli, wszak to jej w sensie zasadniczym przysługuje kwalifikacja prawdziwości, zdaniom twierdzącym – jako językowym wyrazom myśli – wtórnie.

W jego koncepcji myśli, po pierwsze, prawdziwość (czy fałszywość) nie jest kwestią uznania przez tego czy innego człowieka. Obiektywność prawdziwości (czy fałszywości) wynika z „umocowania" tego predykatu w obiektywnej myśli. Frege uważał, że tym samym jest zapewniona obiektywność w nauce. Pisał:

> Myśli nie potrzebują być przez nas myślane, by były prawdziwe. […]. Myśli są niezależne od naszego myślenia. Myśl nie jest dla [podmiotu] myślącego tak właściwa, jak przedstawienie dla [podmiotu] posiadającego przedstawienia. […] W przeciwnym razie nigdy dwoje ludzi nie łączyłoby tej samej myśli z tym samym zdaniem (Frege 1897–1898b/1983, s. 138).

Dalej, myśl nie jest natury psychicznej. Gdyby tak było, to „[…] jej prawdziwość opierałaby się tylko na relacji do czegoś uzewnętrznionego, a tym czymś byłaby myśl, o prawdę której pytaliśmy" (s. 138). Ponadto, gdyby myśl była natury psychicznej, to zdania matematycz-

[17] Więcej na ten temat w pozycji *Gottloba Fregego koncepcja analizy filozoficznej* (Besler, 2010, s. 148–149).

ne wyglądałyby następująco: „Zauważono, że u wielu ludzi występują pewne przedstawienia, które są powiązane z zdaniem «2 + 3 = 5»" (s. 145).

I ostatnia ważna cecha koncepcji Fregego: myśli mogą być prawdziwe lub fałszywe, ich fałsz też bowiem nie zależy od mówiącego (s. 138).

Prawda w szczególnych kontekstach

Problem antynomii

Prawda, fałsz i słowa z nimi związane pojawiają się w korespondencji Fregego z Bertrandem Russellem. Korespondencja ta dotyczy problemu antynomii i wydania drugiego tomu *Grundgesetze der Arithmetik* (Frege, 1903/2009a, wraz z Frege, 1903/2009b)[18], a prawda jest tam przedstawiana w dwóch kontekstach: filozoficznym i logicznym.

Frege próbował przekonać Russella do swojej filozofii języka, co nie było łatwe, i co właściwie mu się nie udało. Tym niemniej mamy wiele klarownych fragmentów związanych z filozoficznymi rozwiązaniami przyjętymi dla prawdy (fałszu). Treściowo raczej nie wnoszą nic nowego do wcześniej tu zreferowanego stanowiska Fregego, ale warte są szczególnej uwagi ze względu na precyzję i jednoznaczność sformułowań. Oto dwa przykłady, jeden z 1902 roku, drugi napisany rok później:

> Wie Pan o tym, że odróżniam sens od znaczenia znaków i że sens zdania nazywam myślą, a jego znacznie – wartością logiczną. Wszystkie zdania prawdziwe mają to samo znaczenie: prawdę; wszystkie zdania fałszywe zaś mają to samo znaczenie: fałsz (Frege, 1902c/1983, s. 231).

> [...] wszystkie zdania, które wyrażają prawdziwe myśli, znaczą to samo, podobnie wszystkie zdania, które oznaczają fałszywe myśli. Mamy np. $3 > 2. \supset .2^2 = 4$ i $2^2 = 4. \supset. 3 > 2$; zatem $3 > 2. = .2^2 = 4$ (Frege, 1903/1976, s. 241).

O roli tego, co prawdziwe i tego, co fałszywe w logice Fregego świadczy poniższy fragment z jeszcze innego listu Fregego do Russella (z 1902 r.): „Zauważam – odnośnie do ostatnich punktów poruszonych przez Pana – co następuje: $\acute{\varepsilon}(—\varepsilon)$ jest klasą, która zawiera tylko jeden jedyny przedmiot, mianowicie prawdę, a $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\mathfrak{a} = \mathfrak{a})$ jest klasą,

[18] Więcej na temat korespondencji Fregego z Russellem zob. w innych pozycjach mojego autorstwa (Besler, 2015; Besler, w druku).

która zawiera tylko jeden jedyny przedmiot, mianowicie fałsz" (Frege, 1902b/1976, s. 219).

Prawdziwość jest w istotny sposób związana z prawem V, prowadzącym do antynomii. Mówi ono o ekwiwalentności równości przebiegów dwóch różnych funkcji i równości wartości tych funkcji dla każdego argumentu, co Frege zapisywał następująco (1893/2009, s. 36):

$$\vdash(\acute{\varepsilon}f(\varepsilon)=\acute{\alpha}g(\alpha))=(\neg\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-f(\mathfrak{a})=g(\mathfrak{a}))$$

Frege próbował ratować przed antynomią swój system logiczny umożliwiający definiowanie podstawowych pojęć arytmetyki liczb naturalnych przez wprowadzenie ograniczenia ogólności funkcji (Frege, 1903/2009c). Tam temat prawdy i fałszu pojawia się tylko w jednym miejscu: „[…] zakres pojęcia, pod które podpada tylko prawda, powinno być prawda, a zakres pojęcia, pod które podpada tylko fałsz, powinien być fałsz. To ustalenie nie doznało żadnej zmiany wraz z nowym ujęciem zakresów pojęć" (Frege, 1903/2009c, s. 561).

Dodam tu, że problematyczności prawa V Frege był świadomy na prawie 10 lat przed odkryciem Russella. Pisał tak:

> Jeżeli, na przykład, ktoś miałby znaleźć coś błędnego, musi być w stanie określić dokładnie, gdzie według niego tkwi błąd: w prawach podstawowych, w definicjach, zasadach lub w ich zastosowaniu w pewnym określonym miejscu. Jeśli się uzna, że wszystko jest w porządku, tym samym zna się podstawy, na których opiera się każde jedno twierdzenie. *Uważam, że spór może wywołać tylko jedno z moich praw podstawowych, prawo V, traktujące o przebiegu wartości funkcji [podkreślenie – GB].* To prawo nie jest jeszcze wyraźnie sformułowane przez samych logików, chociaż o tym się myśli, na przykład, gdy mówi się o zakresach pojęć. Uważam to za czysto logiczne. W każdym razie tym samym zostało określone miejsce, gdzie musi nastąpić decyzja (Frege, 1893/2009, s. VII).

Można więc powiedzieć, że Frege od początku wątpił w prawdziwość prawa V (Heck, 2010, s. 349–352), prawa kluczowego dla projektu logicyzmu.

Geometria

Frege zapoznał się z nowym ujęciem geometrii, jakim było *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta (1899). Był pod dużym wrażeniem tej książki, ale nie potrafił się zgodzić z Hilbertem, nie akceptował (nie rozumiał) geometrii pojętej jako system formalny, dopuszczający wiele modeli, w tym modeli geometrii euklidesowej. Temat prawdy pojawia się w tej korespondencji w kontekście innego rozumienia aksjomatów w systemie geometrii i ich funkcji. Dla Fregego aksjomaty są prawdziwymi zdaniami, które nie potrzebują żadnego udowadniania, bo „[…] ich poznanie wypływa z całkiem innych logicznych źródeł poznawczych – można nazwać je oglądem przestrzennym [*Raumanschauung*]. Z prawdy o aksjomatach wynika to, że jeden nie stoi w sprzeczności z drugim" (Frege, 1899/1976, s. 63).

Wszystkie aksjomaty geometrii euklidesowej były dla Fregego niepodważalnie prawdziwe: „Będzie więc niemożliwe na obszarze geometrii elementarnej, euklidesowej, podanie takiego przykładu, gdyż właśnie tutaj wszystkie aksjomaty są prawdziwe" (Frege, 1900/1976, s. 71). Ponadto, według Fregego aksjomaty z konieczności były także z sobą niesprzeczne. Prawdziwość i niesprzeczność aksjomatów wzajemnie się warunkowały.

Hilbert nie przyjmował takiego (idealistycznego) rozumienia myśli, istotnie różniło więc tych korespondentów tło filozoficzne, zawsze obecne w analizach Fregego, rzadko spotykane w listach adresowanych do niego. W ujęciu Fregego owe zdania-aksjomaty wyrażają myśli-aksjomaty (Blanchette, 2015, s. 111).

Analogicznie do wielu tematów opracowywanych przez Fregego, także w kontekście prawdy w geometrii pojawiła się filozofia języka. W niepublikowanym tekście z okresu 1899–1906 na temat geometrii pisał tak:

> Mając na uwadze myśl pytamy o jej prawdziwość (*Wahrsein*). Najwygodniej nazwać prawdziwą myśl prawdziwością (*Wahrheit*). Pewna nauka to całość powiązanych prawd (*Wahrheiten*). Ujmowana przez nas myśl domaga się odpowiedzi na pytanie o jej prawdziwość (*Wahrsein*). Rozpoznanie bycia prawdziwą pewnej myśli czy jak możemy także powiedzieć, rozpoznanie pewnej prawdy (*Wahrheit*) manifestujemy, gdy wypowiadamy zdanie z mocą twierdzącą (Frege, 1899–1906/1983, s. 183).

Po zakończeniu korespondencji z Hilbertem Frege jeszcze parę razy wracał do wyrażenia opinii na temat geometrii w jego ujęciu. W jednym z opublikowanych tekstów powtarza tezę o prawdziwości i niesprzeczności aksjomatów (Frege, 1903/1990).

Dodam, że zarzuty i komentarze Fregego do geometrii Hilberta były szeroko dyskutowane, a Frege przeszedł do historii geometrii jako obrońca prawdziwości aksjomatów (Freudenthal, 1957/2009, s. 494).

Wyrażanie ogólności

Z prawdziwością Frege łączył wyrażanie ogólności. W logice Fregego ogólność wyrażeń jest zapisywana na dwa sposoby:

1. Za pomocą symbolu kwantyfikatora.
2. Przez odpowiedni rodzaj zmiennych.

Jako osobny symbol jest wprowadzony tylko kwantyfikator ogólny:

$$,\!-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a})'$$

jak już wcześniej podawałam, charakteryzowany w odniesieniu do wartości logicznych.

Frege posługuje się także kwantyfikatorem szczegółowym (nie nazywając go tak), chociaż jest on nieobecny jako odrębny znak. Zapisuje go przy użyciu kwantyfikatora ogólnego i negacji, na przykład:

$$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}^2=1\ ,$$

odczytany jako „istnieje co najmniej jedno rozwiązanie równania $a^2 = 1$" (Frege, 1893/2009, s. 12). Prawdopodobnie z uwagi na brak osobnego symbolu na kwantyfikator szczegółowy, Frege prawdziwość łączy tylko z wyrażaniem ogólności i nie odnosi się do wyrażania kwantyfikacji szczegółowej.

Frege zapisuje ogólność także przez zastosowanie odpowiedniej litery zmiennej. Dla przedmiotów są to litery alfabetu łacińskiego, x, a, itd. (Frege, 1893/2009, s. 11). Pisał: „By uzyskać wyrażenie dla ogólności, można pomyśleć o [jego] zdefiniowaniu: „Pod $\Phi(x)$ będzie rozumiana prawda, kiedy funkcja $\Phi(\xi)$ jest prawdą dla każdego argumentu, a w przypadku przeciwnym jest fałszem" (Frege, 1893/2009, s. 11).

Dla funkcji są to duże litery alfabetu greckiego, Φ, Γ, itd. (Frege, 1893/2009, s. 35). Funkcje wyższych rzędów też mają odpowiednie symbole dla argumentów (Frege, 1893/2009, s. 60–61).

Prawdziwość jest dla Fregego istotnie związana z wyrażaniem ogólności praw, bo formuły wyrażające ogólność – z zachowaniem powyższych zasad – wyrażają zarazem prawdziwe myśli (Frege, 1898–1903/1983, s. 176–177).

W tym kontekście ponownie pojawia się także kreska sądu. Mogą nią być poprzedzone tylko formuły będące zdaniami lub formuły z określoną, ogólną dziedziną funkcji, a więc formuły z kwantyfikatorem lub z zmiennymi wyrażającymi ogólność.

Przypadkiem formuły w sposób istotny związanej z ogólnością jest prawo V (Frege, 1893/2009, s. 36), prowadzące do antynomii (Frege, 1902a/1976)[19]. Wyraża ono równoważność równości przebiegów wartości dwóch funkcji z równością tych dwóch funkcji dla każdego argumentu. Po odkryciu antynomii Frege ograniczył zasięg dziedziny tych funkcji i tym samym ograniczył zasięg prawdziwości prawa V (Frege, 1903/2009b, s. 559–560). Uważał, że tym samym utracił ogólność twierdzeń arytmetycznych (Frege, 1903/2009b, s. 551).

Inne konteksty

W omawianym tu okresie temat prawdy pojawia się jeszcze w innych kontekstach, przedstawionych w korespondencji Fregego z wielkimi matematykami tamtych czasów: Hilbertem (1862–1943) i Giuseppem Peanem (1858–1932).

Pierwszy list Fregego do Hilberta dotyczy symboliki matematycznej i w tym kontekście pojawia się temat prawdziwości. Frege odnosił się do matematyki rozumianej jako gra symboli, w oderwaniu od ich znaczeń i pisał:

> […] czysto mechaniczne operowanie formułami jest niebezpieczne: 1. Dla prawdziwości rezultatów, 2. Dla wydajności nauki. Pierwsze zagrożenie prawdopodobnie da się usunąć prawie zupełnie dzięki logicznemu udoskonalaniu oznaczania. Co się tyczy drugiego, to doprowadzilibyśmy naukę do zastoju, gdyby [czysty] mechanizm formalny wziął górę, tak że zupełnie zdusiłby myśli (Frege 1895/1976, s. 58–59)[20].

Kolejny wątek pochodzi z listu Fregego do Peana (lata 1896–1903) i dotyczy konsekwencji wynikających z różnorakiego definiowania równości w arytmetyce:

> […] matematycy wprawdzie zgadzają się w zewnętrznej formie swoich twierdzeń, ale nie w myślach, którymi są powiązane, a te są przecież sednem rzeczy. Co udowadnia ten matematyk, a co tamten rozumie pod tym samym znakiem, to nie jest to samo. Tylko pozornie mamy wielki wspólny skarb prawd

[19] Więcej na ten temat w jednej z innych moich publikacji (Besler, 2015, s. 95–97).

[20] W tym liście Frege nawiązuje do swojego wcześniej opublikowanego artykułu (Frege, 1885/1990). Nie wiadomo, czy Hilbert znał ten tekst.

(*Wahrheiten*) matematycznych. To jest przecież nieznośny stan, któremu trzeba położyć kres tak szybko, jak to tylko możliwe (Frege, 1896–1903/1976, s. 195).

W tej sytuacji Frege proponuje przede wszystkim przyjąć za znaczenie znaku równości identyczność, „zupełną zbieżność" (Frege, 1896–1903/1976, s. 195) – jak pisał. Dalej postuluje by odróżniać równość na poziomie sensu od równości na poziomie znaczenia, dzięki czemu matematyka zostanie uchroniona od generowania zawsze prawdziwych, ale nudnych przykładów zasady identyczności $a = a$. Pisał: „identyczność ma większą wartość poznawczą niż czysty przykład zasady identyczności" (Frege, 1896–1903/1976, s. 195).

Późniejsze wypowiedzi na temat prawdy

Wkrótce po opublikowaniu pozycji zamykającej badany tu okres (1903b/2009) Frege wprowadził ważne punkty do swej teorii prawdy. Tematem do osobnego badania pozostaje, na ile odnalezienie antynomii warunkowało te zmiany.

Wart uwagi jest przedostatni list Fregego do Russella. Tam Frege po raz kolejny podkreśla szczególność predykatu „prawdziwy". Co więcej pojawia się tam – po raz pierwszy – fragment, który może być podstawą do przypisywania Fregemu redundancyjnej koncepcji prawdy:

> Słowo „prawdziwy" nie jest predykatem jak „zielony", co do tego się zgadzamy. W zasadzie w zdaniu „to jest prawdziwe, że 2 + 3 = 5" nie mówi nic więcej niż jest powiedziane w zdaniu „2 + 3 = 5". Prawdziwość nie jest częścią składową myśli, tak jak Mont Blanc ze swymi płatkami śniegu nie jest częścią składową myśli, iż Mont Blanc mierzy więcej niż 4000 metrów (Frege, 1904/1976, s. 245).

Pomijam tu dyskusje, czy Frege faktycznie opowiadał się za teorią zbędności prawdy i ewentualnie w jakim zakresie[21].

W wyżej cytowanym liście jest także wyraźnie sformułowana zasada ekstensjonalności, mówiąca o zastępowalności wyrażeń *salva veritate*, stosowana przez Fregego już wcześniej (Frege, 1893/2009):

> Znaczenie jak najściślej musi być powiązane z prawdziwością. […] Abstrahując od mowy zależnej, bez szkody dla prawdy, każde prawdziwe zdanie może być zastąpione innym prawdziwym zdaniem, a każde fałszywe – fałszywym. A wraz

[21] Dla przykładu, Baldwin uważa, że Frege nie był zwolennikiem deflacyjnej koncepcji prawdy (Baldwin, 1997, s. 9).

> z tym mówi się, że wszystkie zdania prawdziwe znaczą to samo lub oznaczają i podobnie fałszywe [...] (Frege, 1904/1976, s. 247).

Tematem prawdy Frege zajął się ponownie po zapoznaniu się w 1918 z nieopublikowaną wtedy jeszcze wersją *Logisch-philosophische Abhandlung* Ludwika Wittgensteina (Wittgenstein, 1921/1997) i opublikował artykuł na ten temat (Frege, 1918–1919/1990a). Tam powtarza wiele swych tez z wcześniejszego tekstu (Frege, 1897–1898/1983b), dodając argumentację przeciwko korespondencyjnej teorii prawdy[22] i rozbudowaną, filozoficzną charakterystykę „królestwa myśli", istotnie związanego z prawdą.

Zakończenie

W okresie wydawania dwóch tomów *Grundgesetze der Arithmetik* prawda była dla Fregego ważną kategorią z zakresu filozofii języka (od tego aspektu Frege rozpoczyna), logiki formalnej (tu prawda pełni rolę kluczowego „narzędzia"), filozofii logiki (wyrażanie ogólności i problem antynomii), filozofii matematyki (problem prawdziwości aksjomatów w geometrii i rozumienie równości w arytmetyce) i ontologii (idealistyczne rozumienie „królestwa myśli", istotnie związanego z prawdą). Mając na uwadze rozwój poglądów Fregego na temat prawdy (Sluga, 2002), zakończę zebraniem głównych tez z badanego tu okresu:

1. W punkcie wyjścia prawda jest badana w odniesieniu do języka codziennego.
2. W logice prawda jest wyrażana za pomocą znaku asercji, dlatego prawda jest związana z sądzeniem.
3. Prawda dotyczy logiki bardziej niż jakiejkolwiek innej nauki.
4. Prawda jest kategorią normatywną, bo prawa logiczne – jako prawdziwe – wyznaczają kierunek myśleniu.
5. Wyrażenia językowe mają sens i znaczenie, znaczeniem zdań są wartości logiczne (prawda, fałsz).
6. Przy pomocy wartości logicznych w systemie logicznym są charakteryzowane spójniki logiczne, kwantyfikator oraz wynikanie logiczne.

[22] Szczegółowo Fregego krytyka korespondencyjnej teorii prawdy została omówiona w dwóch pozycji w bibliografii (Sluga, 2007, s. 4–9; Baldwin, 1997).

7. Nośnikami prawdziwości są: najpierw myśl, potem zdanie i język nauki, nigdy przedstawienie.
8. Z koncepcją prawdy jest istotnie związana filozoficzna koncepcja myśli, jako pewnej niezmiennej, obiektywnej rzeczywistości idealnej.
9. Prawdziwość jest terminem pierwotnym, niedefiniowalnym.
10. Prawda – obok niesprzeczności – jest ważną kategorią dla charakterystyki aksjomatów w geometrii.

BIBLIOGRAFIA

Baldwin, T. (1997). Frege, Moore, Davidson: The Indefinability of Truth. *Philosophical Topics*, *25*(2), 1–18.

Besler, G. (2010). *Gottloba Fregego koncepcja analizy filozoficznej*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego.

Besler, G. (2013). Gottlob Frege o liczbie. Przyczynek do określenia roli, jaką dla filozofów pełni historia matematyki. *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, *53*, 133–164.

Besler, G. (2015). Tematyka korespondencji naukowej Gottloba Fregego z Bertrandem Russellem w latach 1902–1904. W: R. Murawski (red.), *Filozofia matematyki i informatyki* (s. 91–106). Kraków: Copernicus Center Press.

Besler, G. (w druku). *„Podążamy tymi samymi lub podobnymi drogami myślowymi". Tematyka korespondencji logicznej Gottloba Fregego z Giuseppem Peanem, Dawidem Hilbertem i Bertrandem Russellem*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego.

Blanchette, P. (2015). Frege's Critique of Modern Axioms. W: D. Schott (red.), *Frege: Freund(e) und Feind(e). Proceedings of the International Conference 2013* (s. 105–120). Berlin: Logos Verlag.

Burge, T. (2005). *Truth, Thought, Reason. Essays on Frege*. Oxford: Clarendon Press.

Cook, R. (2013). Appendix: How to read *Grundgesetze*. W: G. Frege (2013), s. A-1–A-42.

Dummett, M. (1981). *The Interpretation of Frege's Philosophy*. Cambridge: Harvard University Press.

Frege, G. (1879/1997). *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Hrsg. I, Angelelli. Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag. Wyd. polskie (fragmenty): Ideografia. Język formalny czystego myślenia wzorowany na języku arytmetyki (Przedmowa, §§ 1–13). W: K. Rotter (1997), s. 45–85.

Frege, G. (1885/1990). Über formale Theorien der Arithmetik. W: G. Frege (1990), s. 103–111.

Frege, G. (1891/1990). Funktion und Begriff. W: G. Frege (1990), s. 125–142. Wyd. polskie: Funkcja i pojęcie. W: G. Frege 1977, s. 18–44.

Frege, G. (1892/1990a). Über Begriff und Gegenstand. W: G. Frege (1990), s. 167–178. Wyd. polskie: Sens i znaczenie. W: G. Frege (1977), s. 45–59.

Frege, G. (1892/1990b). Über Sinn und Bedeutung. W: G. Frege (1990), s. 143–162. Wyd. polskie: Sens i znaczenie. W: G. Frege (1977), s. 60–88.

Frege, G. (1893/2009). Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschrift abgeleitet. Bd. 1. W: G. Frege (2009), s. 1–303.

Frege, G. (1896/1990). Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene. W: G. Frege (1990), s. 220–233.

Frege, G. (1899/1990). Über die Zahlen des Herrn H. Schubert. W: G. Frege (1990), s. 240–261.

Frege, G. (1903/2009a). Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschrift abgeleitet. Bd. 2. W: G. Frege (2009), s. 305–583.

Frege, G. (1903/2009b). Nachwort. W: G. Frege (2009), s. 549–563.

Frege, G. (1903/2009c). Über die Grundlagen der Geometrie. W: G. Frege (1990), s. 262–266.

Frege, G. (1906/1990). Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae. W: G. Frege (1990), s. 324–328.

Frege, G. (1908/1990). Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs neue nachgewiesen. W: G. Frege (1990), s. 329–333.

Frege, G. (1918–1919/1990a). Der Gedanke. Eine logische Untersuchung. W: G. Frege (1990) s. 342–361. Wyd. polskie: Myśl – studium logiczne. W: G. Frege (1977), s. 101–129.

Frege, G. (1918–1919/1990b). Die Verneinung. Eine logische Untersuchungen. W: G. Frege (1990), s. 362–378. Wyd. polskie: Negacja. Badanie logiczne. Tłum. M. Klementowicz. *Kwartalnik Filozoficzny*, *30* (1), 139–157.

Frege, G. (1923/1990). Gedankengefüge. W: G. Frege (1990), s. 378–394.

Frege, G. (1976). *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Hrsg. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, Ch. Thiel, A. Veraart. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

Frege, G. (1895/1976). Frege an Hilbert, 1.10. W: G. Frege (1976), s. 58–59.

Frege, G. (1896/1976). Frege an Peano, 29.09. W: G. Frege (1976), s. 181–186.

Frege, G. (1896–1903/1976). Frege an Peano, bez daty. W: G. Frege (1976), s. 194–198.

Frege, G. (1899/1976). Frege an Hilbert, 27.12. W: G. Frege (1976), s. 60–64.

Frege, G. (1900/1976). Frege an Hilbert, 6.01. W: G. Frege (1976), s. 70–76.

Frege, G. (1902/1976a). Frege an Russell, 22.06. W: G. Frege (1976), s. 212–215. Wyd. polskie: List do B. Russella 22.06.1902. W: R. Murawski (1986), s. 203–204.

Frege, G. (1902/1976b). Frege an Russell, 29.06. W: G. Frege (1976), s. 217–219.

Frege, G. (1902/1976c). Frege an Russell, 20.10. W: G. Frege (1976), s. 231–233.

Frege, G. (1903/1976). Frege an Russell, 21.05. W: G. Frege (1976), s. 239–241.

Frege, G. (1904/1976). Frege an Russell, 3.11. W: G. Frege (1976), s. 243–248.

Frege, G. (1977). *Pisma semantyczne*. Warszawa: PWN.

Frege, G. (1983). *Nachgelassene Schriften*. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

Frege, G. (1879–1891/1983). Logik. W: G. Frege (1983), s. 1–8.

Frege, G. (1897–1898/1983a). Begründung meiner strengeren Grundsätze des Definierens. W: G. Frege (1983), s. 164–170.

Frege, G. (1897–1898/1983b). Logik. W: G. Frege (1983), s. 137–163.
Frege, G. (1898–1903/1983). Logische Mängel in der Mathematik. W: G. Frege (1983), s. 171–181.
Frege, G. (1899–1906/1983). Über Euklidische Geometrie. W: G. Frege (1983), s. 182–184.
Frege, G. (1906/1983). Einleitung in die Logik. W: G. Frege (1983), s. 201–212.
Frege, G. (1914/1983). Logik in der Mathematik. W: G. Frege (1983), s. 219–270.
Frege, G. (1990). *Kleine Schriften*. Hrsg. I. Angelelli. Hildesheim: Georg Olms.
Frege, G. (2009). *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschrift abgeleitet. Bd. 1 und 2, in moderne Formelnotation transkribiert und mit einem ausführlichen Sachregister versehen von T. Müller, B. Schröder, R. Stuhlmann-Laeisz*. Paderborn: Mentis.
Frege, G. (2013). *Basic Laws of Arithmetic. Derived Using Concept-script*. Oxford: Oxford University Press.
Freudenthal, H. (2009). *Selecta*. Pobrane z: http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/freudselecta.pdf.
Freudenthal, H. (1957/2009). Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. Zugleich eine Besprechung der 8. Aufl. von Hilbert's „Grundlagen der Geometrie". W: H. Freudenthal (2009), s. 486–523.
Glanzberg, M. (2018). *The Oxford Handbook of Truth*. Oxford: Oxford University Press.
Greimann, D. (2000). The Judgement-Stroke as a Truth-Operator. A New Interpretation of the Logical Form of Sentences in Frege's Scientific Language. *Erkenntnis*, *52*(2), 213–238.
Greimann, D. (2003a). *Das Wahre und das Falsche*. Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag.
Greimann, D. (2003b). *Freges Konzeption der Wahrheit. Hildesheim*. Zürich, New York: Georg Olms Verlag.
Greimann, D. (red.). (2007). *Essays on Frege's Conception of Truth*. Amsterdam, New York: Rodopi.
Heck, R. (2010). Frege and Semantics. W: M. Potter, T. Ricketts (red.), *The Cambridge companion to Frege* (s. 342–378). New York: Cambridge University Press.
Heck, R. G., May, R. (2018). Truth in Frege. W: M. Glanzberg (red.), *The Oxford Handbook of Truth* (s. 193–215). New York: Oxford University Press.
Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Verlag von B.G. Teubner.
Marek, I. (1993). Początki matryc logicznych. *Logika*, *15*, 5–44.
Miszczyński, R. (2015). Fregego krytyka arytmetyki formalnej w *Grundgesetze der Arithmetik*. *Filozofia Nauki*, *23*(4), 89–102.
Murawski, R. (red.). (1986). *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.
Murawski, R. (red.). (2015). *Filozofia matematyki i informatyki*. Kraków: Copernicus Center Press.
Pietruszczak, A., Malinowski J. (red.). (2004). *Wokół filozofii logicznej*. Toruń: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.
Potter, M., Ricketts T. (red.). (2010). *The Cambridge Companion to Frege*. Cambridge: Cambridge University Press.

Reck E.H. (2002). *From Frege to Wittgenstein. Perspectives on Early Analytic Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.

Rotter, K. (red.). (1997). *Próby gramatyki filozoficznej. Antologia: Franz Brentano, Gottlob Frege, Christian Thiel*. Wrocław: Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego.

Russell, B. (1902/1976). Russell and Frege, 16.06. W: G. Frege (1976), s. 211–212. Wyd. polskie: Murawski (1986), s. 221–222.

Rygalski, A. (2004). Frege o prawdzie. W: A. Pietruszczak, J. Malinowski (red.), *Wokół filozofii logicznej* (s. 295–310). Toruń: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.

Schott D. (red.). (2015). *Frege: Freund(e) und Feind(e). Proceedings of the International Conference 2013*. Berlin: Logos Verlag, s. 105–120.

Sluga H. (2002). Frege on Indefinability of Truth. W: E.H. Reck (red.), From Frege to Wittgenstein. Perspectives on Early Analytic Philosophy (s. 75–95). Oxford: Oxford University Press.

Wittgenstein, L. (1921/1997). *Tractatus logico-philosophicus. Logisch-philosophische Abhandlung*. Leipzig: Unesma. Wyd. polskie: *Tractatus logico-philosophicus*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Gottlob Frege on truth during the period of edition of two volumes of *Grundgesetze der Arithmetik* (1893–1903)

Summary: In 1893 and 1903, two volumes of Frege's most important work *Grundegezte der Arithmetik* were published. This period can be called the peak of Frege's logicism. Although the subject of truth in Frege's logical and philosophical works has been repeatedly investigated there is a lack of studies on his view in this period, especially in the Polish literature.In this article, therefore, I carry out the following research task: to collect and order Frege's statements about the truth during the period of publishing two volumes of *Grundegezte der Arithmetik*. I will refer to texts published during Frege's life, published posthumously and his correspondence. Particularly noteworthy are: *Grundegezte der Arithmetik* and the unpublished *Logik* (1897–1898). That is why separate sections are devoted to these two items, and remarks on truth from other texts are grouped thematically: the problem of antinomy, geometry, expression of generality, and others. The subject of truth appears here in relation to logic, philosophy of language, philosophy of logic, philosophy of mathematics and ontology.

Key words: Gottlob Frege, truth, logic, truth-values, thought, logicism.

Studia Semiotyczne, t. XXXII, nr 2 (2018), s. 75–86
ISSN 0137-6608, e-ISSN 2544-073X
DOI: 10.26333/sts.xxxii2.05
Rozprawa

Stanisław Krajewski*

ON SUPRASUBJECTIVE EXISTENCE IN MATHEMATICS

Summary: The professional mathematician is a Platonist with regard to the existence of mathematical entities, but, if pressed to tell what kind of existence they have, he hides behind a formalist approach. In order to take both attitudes into account in a possibly serious way, the concept of suprasubjective existence is proposed. It involves intersubjective existence, plus a stress on objectivity devoid of actual objects. The idea is illustrated, following William Byers, by the phenomenon of the rainbow: it is not an object but can be said to possess a subjective objectivity.

Key words: mathematics, Platonism, formalism, existence, objective, subjective, intersubjective, suprasubjective, culture, rainbow.

1 The Problem

The problem of the existence of numbers and other mathematical entities is among the most fundamental, the most studied and the most divisive in the philosophy of mathematics. Some opt for realism, often called Platonic, according to which numbers, circles, functions, spaces, etc. exist objectively in a separate realm. Others deny such non-physical existence, and opt for another extreme, that is, formalism, according to which only symbolic expressions exist, and mathematical objects are fictions. A milder position is possible: objects

* University of Warsaw, Institute of Philosophy. E-mail: stankrajewski@uw.edu.pl. ORCID: 0000-0002-1142-8112.

are mental constructions, and there exist various options regarding possible constructions. The conflicting views coexist, and the problem which of them is right seems undecidable. This is a deeply frustrating, even though not unfamiliar, situation for philosophers.

At the same time, from the perspective of working mathematicians, the problem seems virtually non-existent. Numbers and other items are treated simply as pre-existing objects. When asked if those objects really exist, mathematicians hesitate and often manifest the attitude which is aptly summarized by the classic saying that mathematicians are Platonists on weekdays and formalists on weekends (Hersh, 1979, p. 32). When doing mathematics, they see mathematical objects as real and objective; they perceive them as existing somewhere out there. When asked about the situation, and forced to philosophize, they lose certainty about the existence of numbers and other objects and hide behind a formalist position: mathematics is just a game, dealing with symbols. These contradictory views concerning existence in mathematics are manifested not just by greenhorns, but also by the most advanced and brightest professional mathematicians.

Usually philosophers see acceptance of two contradictory views concerning basic questions as a weakness, something that should be overcome. They believe that it would be desirable either to adopt one and argue in its favor, or to find a third position that would illuminate the other ones. Mathematicians apparently disagree, at least with regard to this issue: they are ready to support both realism and formalism. Maybe they would not express both in one utterance, but they are attracted to both and, *de facto*, do manifest the double position. This is very nicely expressed by Paul J. Cohen, an outstanding mathematician, who introduced an innovative method to prove the independence of the Continuum Hypothesis and the Axiom of Choice from the standard axioms of set theory. According to him:

> The Realist [Platonist] position is probably the one which most mathematicians would prefer to take. It is not until he becomes aware of some of the difficulties in set theory that he would even begin to question it. If these difficulties particularly upset him, he will rush to the shelter of Formalism, while his normal position will be somewhere between the two, trying to enjoy the best of two worlds (Cohen, 1971, p. 11).

Formalism is, of course, a relatively new position, although related to much older nominalist views. It spread when modern abstract mathematics developed and the existence of alternative geometries, and later of the wealth of other mutually incompatible mathematical theories, was made clear. In contrast, realism is a traditional view, traceable to Plato. One can argue (Król, 2015) that Platonism is necessary for mathematical activity, since it is the method of abstract mathematics as we have known it since the ancient Greeks. Indeed, Brouwer has convinced us that the very use of the law of excluded middle often reveals the Platonic conviction that a number preexists and that is why we may assume that it has or does not have a certain property.

Mathematicians seem to hold contradictory views about the nature of their subject matter. What should be the philosophers' reaction?

2 The Proposal

Mathematicians apparently accept both Platonic and formalist conceptions. My proposal is straightforward: Why don't we accept this reality in a most serious manner? If we agree that there is genuinely nothing more important to say philosophically about the existence of mathematical objects than what mathematicians express by their double position, what will follow concerning the problem of existence in mathematics? As a matter of fact, the wish to accept the double position, has been expressed in recent discussions on the philosophy of mathematics. It is implied by the move toward pluralism, extensively argued for by Michèle Friend (2013). It is also consciously advocated by William Byers (2017) and to some extent by some other authors of the volume honoring Reuben Hersh (Sriraman, 2017). For example, Hersh himself writes that "learning and teaching mathematics" is about "processes and concepts that are *taken for granted as real entities*" and at the same time they are not "real entities »out there« – independent of human apprehension" (2017a, p. 42).

I believe that the attempt to accept the ambiguity resulting from retaining both a realistic and a formalist approach is not just an intellectual exercise, but it is also a proper way of handling the problem. The attitude of mathematicians should be seen as an essential ingredient of the problem, not just a secondary circumstance. Rather than impose solutions, philosophers should take into account the mathematical experience. I mean the genuine experience, which is what the philosophers of mathematics have been trying to do in the last two decades or so (cf. Corfield, 2006). By the way, I believe that this experience is available not only to professional mathematicians, but also to philosophers and all those who try to do mathematics rather than just read about it.

Thus the idea is to retain the double positon. This is not an easy step. For example, Cohen himself decided to choose the formalist position (Cohen, 1971, p. 13). He did it following Abraham Robinson's lecture, *Formalism'64* (1965). At the same time, he admitted that there was a "great esthetic temptation [...] to accept set theory as an existing reality" (Cohen, 1971, p. 15).

The double position, the enjoyment of the best of two worlds, suggests that we need a view of numbers, sets and other mathematical entities that incorporates both the realist acceptance of their existence and the formalist denial thereof. Statements about mathematical objects can then be evaluated according to realism as well as according to formalism. In other words, with the same seriousness we should see mathematical truth as correspondence and as coherence.

One approach that seems, at first glance, to fulfill the double role can be called intersubjectivism. Intersubjective existence would mean existence beyond the subjectivity of an individual grasp of the world, but would not assume absolute existence completely devoid of a subjective perspective. Existence would be relative to communities of discourse. It would be a cultural creation, present between subjects, but not completely beyond human subjects. The book *What Is Mathematics, Really?* by Reuben Hersh, based on sound knowledge of living mathematics, proposing a "humanist philosophy of mathematics" (Hersh, 1997, p. 246), is a good example of this approach. According to it, mathematics is "a social-cultural-historical reality," so it is "»inner« with respect to society at large, »outer« with respect to you and me individually" (Hersh, 1997, p. 17). Other authors, like Wilder in (1981), offer even more explicitly cultural accounts of mathematics. Among the earlier of such approaches is the thesis by the anthropologist Leslie White: "mathematics in its entirety, its «truths» and its «realities,» is a part of human *culture,* nothing more" (White, 1947/2006, p. 307). According to him, mathematics has "the sort of reality possessed by a code of etiquette, traffic regulations, the rules of baseball, the English language or rules of grammar" (White, 1947/2006, p. 319).

And this is the point at which the cultural interpretation is unsatisfactory. Though mathematics is a cultural construction, it is not arbitrary. We have to adjust to its exigencies in a way different than when we adopt the rules of grammar, let alone baseball. Mathematics seems to be objective, or independent of our needs, decisions and actions, in a stronger, more fundamental way. When we enter a framework, a mathematical theory or a realm of mathematical entities, we feel ourselves to be subjected to rigid constraints which no cultural effort can overcome. For example, the move from real numbers to complex numbers is considered by mathematicians not as just one possible culturally defined extension of the reals, but as the right one, imposed by the subject matter. Indeed, we feel we have discovered the truth of that matter – a timeless truth.

Therefore, even though the intersubjective interpretation of mathematical existence is philosophically attractive, it is not sufficient. It does not involve as much objectivity as it should. The realm of mathematics seems objective to mathematicians. When we try to find solutions to problems, we need to painstakingly search through the reality we find ourselves in. That reality seems as objective as anything in the real world. It is independent of us, not only us as individuals, but also us as human culture. It is beyond subjects. Put a bit differently, there exist mathematical facts. And they cannot be explained as indirect consequences of our cultural assumptions, that is, no such explanation will be satisfying to mathematicians. A dimension of genuine objectivity must necessarily be involved in any satisfactory account. The simplest examples are provided by natural numbers. Given any collection of prime numbers we can indicate a larger prime number, as was demonstrated by Euclid. This is an objective fact. Further, either there are finitely many pairs of primes or not, but we still do not know which is the case. One or the other is a fact, and we have no influence upon it. This statement is obvious to every mathematician.

Objective facts of this sort, completely independent of any subject, induce realistic views, that is, the conviction that numbers are (Platonic) objects. Yet to admit the existence of such fairy tale objects seems unwarranted, and as hard to accept by a serious adult as are distant ridiculous mythologies. That is why the formalist approach is attractive.

A way out of the contradiction between objectivist realism and subjectivist formalism, the philosophical third position, would be to accept objectivity and reject objects. Then both of those positions can be maintained. And they would be adopted in a manner natural for a mathematician. Thus, whereas there are objective facts of the matter, there is no correspondence between our concepts and some independently existing objects. In the well-known earlier book (1981), written with Philip J. Davis, Hersh expressed this sentiment:

> Do we really have to choose between a formalism that is falsified by our everyday experience, and a Platonism that postulates a mythical fairyland where the uncountable and the inaccessible lie waiting to be observed by the mathematician whom God blessed with a good enough intuition? [quoted from the later edition, 1995, p. 448].

This remark is directed against the modern followers of Platonism, like the leading logician Kurt Gödel, who famously wrote about sets that

> the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence. They are in the same sense necessary to obtain a satisfactory system of mathematics as physical bodies are necessary for a satisfactory theory of our sense perceptions (1944/1990, p. 128).

The idea that objectivity can occur in the absence of objects has been expressed by some philosophers of mathematics, e.g., William Byers (see Section 3). Interestingly enough, Gödel himself also said things to this effect. In his lecture (1951/1995, p. 311), he observed that "mathematical objects and facts (or at least *something* in them) exist objectively and independently of our mental acts and decisions," which would be a restatement of Platonism if not for the mitigating phrase in the parentheses. A much stronger indication of the separation between objectivism and objects is reported by Hao Wang. According to it, Gödel emphasized "(1) the fallibility of our knowledge; (2) the epistemological priority of objectivity over objects." (Wang, 1996, p. 210). And later he added, with regard to sets, that "the question of the objective existence of the objects of mathematical intuition […] is not decisive" (Gödel, 1964/1990, p. 268).

Having separated objectivism from objects, we enter rather unexplored ground. Where this objectivity comes from, if not from objects, seems to be left unexplained. We can try to speculate that this restricted form of objectivity is grounded in the physical or the biological or the conceptual world, that it is caused by our perceptual or knowledge-acquiring apparatus, by our biological or social composition, but I am not trying to argue here for any specific explanation. Maybe other dimensions of broadly conceived reality bring the feeling of objectivity (without objects). I think that we need to move away from objects and, as a result, accept the associated uncertainty. Perhaps this approach was indicated by Hersh's general remark that "mathematics is part of human culture and history, which are rooted in our biological nature and our physical and biological surroundings" (Hersh, 1997, p. 17).

Anyway, we are led to an extension of intersubjectivism. In mathematics, and perhaps elsewhere as well, there is something beyond or above the subjective, as well as above the intersubjective. I believe this approach deserves a name. Because of the addition of something above the intersubjective I propose to call it *suprasubjective*. The schematic formulation would read:

Suprasubjective = intersubjective + objective without objects.

3 A Metaphor

William Byers, who is both a mathematician and philosopher of mathematics, offers deep and novel insights into real mathematics. In his remarkable book (2007) demonstrating the importance of paradox, ambiguity, and even contradiction for living mathematics, he introduced the idea of the objective subjectivity or subjective objectivity of mathematics. Mathematical patterns, he says, "contain both objective and subjective perspectives" (Byers, 2007, p. 345). I believe he is pointing in the same direction as the one that is being sketched here. Byers quotes George Lakoff and Mark Johnson who in their classic book (1980) on metaphors propose to go beyond "the myths of objectivism and subjectivism." Yet the most illuminating metaphor is borrowed by Byers from Nick Herbert, who in his book (1985) on quantum mechanics uses the phenomenon of the rainbow to illustrate the fact that the quantum world is objective, but it is not made of objects; it is objectless. Similarly, a rainbow is an objective phenomenon, but it is not a "thing."

The rainbow has been fully explained by science. Yet it retains not only its old power and beauty but also possesses the rare quality of being both fully objective and completely viewer dependent. It is objective because it can be photographed and it is intersubjective as everybody sees it the same way if put in the same place. At the same time, changing the place changes slightly the location of the rainbow. It seems to be there, but there is literally nothing there where it seems to emerge. It is not a physical object, but it is a physical phenomenon. It exists for us, but it is not just a hallucination. It is also much more concrete, stable, and repeatable than a mirage in the desert. The rainbow is indeed a perfect example of a mixture of objective and subjective existence. One cannot be separated from the other. A rainbow is not an object, but it is objective subjectively or subjective objectively.

Byers suggests that mathematics can be seen in a similar way: "when one encounters some mathematical entity it is never devoid of a point of view" (Byers, 2007, p. 345). And yet it remains objective. And it does not need to be an object. It is like a rainbow and the quantum world. If we agree that mathematical entities are of this character, we get more than subjective and more than intersubjective existence. We also get objectivity without objects. In one word, suprasubjective existence.

The rainbow metaphor is also reassuring in another way. We know the optical mechanism behind the phenomenon. However, even if we did not, as was the case for centuries, we could still see the rainbow as an example of subjective objectivity. There would remain a mystery regarding the mechanism, but, according to our scientific approach, we would be sure that one day the nature of the phenomenon would be discovered. I think that much the same is true about mathematics. We have entered unknown ground, we do not know how the suprasubjectivity arises, what kind of mechanism makes it work, but we can hope that one day the matter will be explained.

4 An Assessment

As mentioned above, the proposal made in this paper is implicitly contained in suggestions made by other authors. Hersh uses the term "object" for a cultural creation: "Mathematical entities are real objects and they are part of culture," that is, they are "sociocultural entities and intersubjective" (Hersh, 2017b, p. 361). Hersh's example, the US Supreme Court, which is not physical or merely mental, and does influence our lives in a very real way, is illuminating, but also misleading. This "object" is largely a social convention, while mathematics seems to be much more independent of any conventions. I believe that it is better not to use the term "object" but to retain "objectivity" and use the term "suprasubjective".

Something akin to it has been recently clearly expressed by Byers. He says, "we feel that that mathematics *is* at arms' length and that it is objective and timeless" (Byers, 2017, p. 46). Then he distinguishes strong from weak objectivity. Mathematics, he claims, "is objective in the weak sense but not in the strong – free from prejudice and arbitrary opinion but not independent of intelligence" (Byers, 2017, p. 48; see also Byers, 2015). I believe that the concept of suprasubjectivity is helpful here: we reassert intersubjectivity and indicate restricted objectivity while avoiding talking about objects.

Perhaps the approach adopted in this paper constitutes an interpretation of, or a development within, the Popperian idea of World 3. According to it, as summarized by Eduard Glas,

> mathematical objects, relations and problems can be said in a way to exist independently of human consciousness *although* they are products of human (especially linguistic) practices. […] Once created, however, this product assumes a partially autonomous and timeless status […], that is, it comes to possess its own objective, partly unintended and unexpected properties, irrespective of when, if ever, humans become aware of them (Glas, 2005, p. 292).

I believe that this objectivity needs to be emphasized in a more fundamental and explicit way than is usually done when this intuition is expressed. That is why we need a term like "suprasubjective."

I believe that the concept of suprasubjective existence can be partially acceptable to the main schools offering answers to the problem of existence in mathematics. This new concept does take into account the main insights of the competing schools. Thus, first, it should be sufficiently satisfactory for realists since it involves objectivism, allows for the presence of the rigidity and mind-independence that is characteristic of mathematical constructions, even those freshly invented by us. The realists would oppose, however, the rejection of independently existing objects.

The concept of suprasubjective existence should be sufficiently acceptable for formalists as it assumes the crucial role of our standpoints, including the language and formulations. They, or rather the extreme formalists (if there are any), would, however, be dissatisfied with the approach that there is something more than meaningless games, whose choice is guided by extra-mathematical needs, be they esthetic or pragmatic.

The proposal should be satisfactory for constructivists and culturalists since it involves human activity and the intersubjective dimension as its main pillar. It adds, however, the most serious objectivity claim. At the same time, it rejects Platonic objects, leaving open more indirect ways of justifying objectivity. The understanding of those ways may require a hitherto unknown development of our descriptions of interactions between human subjects, their ideas and their physical, biological, and social environment.

And, above all, the concept of suprasubjective existence of mathematical entities should be highly satisfactory for mathematicians. It harmonizes, I believe, with their instincts.

The present proposal has arisen from an attempt to listen to mathematicians rather than impose interpretations on them. As Michèle Friend explains the concept of pluralism in philosophy of mathematics, it is based on "unprejudiced observation of mathematical practice and a desire to encompass and accommodate as wide a variety of practices as is coherently possible" (Friend, 2013, p. 257). Whether this is a sound way of doing the philosophy of mathematics is bound to remain debatable.

REFERENCES

Byers, W. (2007). *How Mathematicians Think: Using Ambiguity, Contradiction, and Paradox to Create Mathematics*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Byers, W. (2015). *Deep Thinking: What Mathematics Can Teach Us About the Mind*. Singapore: World Scientific Publishing.

Byers, W. (2017). Can You Say What Mathematics Is? In: B. Sriraman (Ed.), *Humanizing Mathematics and its Philosophy. Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh* (pp. 45–60). Cham: Birkhäuser, Springer International Publishing.

Cohen, P. J. (1971). Comments of the Foundations of Set Theory. In: D. Scott (Ed.), *Axiomatic Set Theory* (pp. 9–15). Providence: American Mathematical Society.

Corfield, D. (2006). *Towards a Philosophy of Real Mathematics*. Cambridge University Press.

Davis, P. J., Hersh R. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser.

Davis, P. J., Hersh R., Marchisotto E. A. (1995). *The Mathematical Experience*. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser.

Friend, M. (2014). *Pluralism in Mathematics: A New Position in Philosophy of Mathematics*. Dordrecht: Springer.

Glas, E. (2005). Mathematics as Objective Knowledge and as Human Practice. In: R. Hersh (Ed.), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (pp. 289–303). New York: Springer.

Gödel, K. (1944/1990). Russell's Mathematical Logic. In: S. Feferman, J. Dawson, S. Kleene, G. Moore, R. Solovay, J. van Heijenoort (Eds.), *Collected Works II, Publications 1938–1974* (pp. 119–143). Oxford: Oxford University Press. (Reprinted from *The Philosophy of Bertrand Russell*, p. 123–153, by P. Schilpp (Ed.), Evanston: Northwestern University).

Gödel, K. (1951/1995). Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications. In: S. Feferman, J. Dawson, W. Goldfarb, Ch. Parsons, R. Solovay (Eds.), *Collected Works III, Unpublished Essays and Lectures* (pp. 304–323). Oxford: Oxford University Press.

Gödel, K. (1964/1990). What is Cantor's Continuum Problem? In: S. Feferman, J. Dawson, S. Kleene, G. Moore, R. Solovay, J. van Heijenoort (Eds.), *Collected Works II, Publications 1938–1974* (pp. 254–270). Oxford: Oxford University Press.

Herbert, N. (1985). *Quantum Reality: Beyond the New Physics*. New York: Anchor Books, Double Day.

Hersh, R. (1979). Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics. *Advances in Mathematics*, *31*(1), 31–50.

Hersh, R., (1997). *What Is Mathematics, Really?* Oxford: Oxford University Press.

Hersh, R. (2017a). Review of *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. In: B. Sriraman (Ed.), *Humanizing Mathematics and its Philosophy. Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh* (pp. 39–44). Cham: Birkhäuser, Springer International Publishing.

Hersh, R. (2017b). On the Nature of Mathematical Entities. In: B. Sriraman (Ed.), *Humanizing Mathematics and its Philosophy. Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh* (pp. 361–363). Cham: Birkhäuser, Springer International Publishing.

Król, Z. (2015). *Platonism and the Development of Mathematics. Infinity and Geometry*. Warszawa: IFiS PAN.

Lakoff, G., Johnson M. (1980). *The Metaphors We Live By*. Chicago: University of Chicago Press.

Robinson, A. (1965). Formalism '64. In: Y. Bar Hillel (Ed.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science* (pp. 228–246). Amsterdam: North Holland.

Sriraman, B. (Ed.) (2017), *Humanizing Mathematics and its Philosophy. Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh*. Cham: Birkhäuser, Springer International Publishing.

Wang, H. (1996). *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy*. Cambridge, MA: MIT Press.

White, L. (1947/2006). The Locus of Mathematical Reality: An Anthropological Footnote. In: R. Hersh (Ed.), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (pp. 304–319). New York: Springer. (Reprinted from *Philosophy of Science*, *14*(4), 289–303).

Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a Cultural System*. Oxford: Pergamon Press.

Studia Semiotyczne, t. XXXII, nr 2 (2018), s. 87–105
ISSN 0137-6608, e-ISSN 2544-073X
DOI: 10.26333/sts.xxxii2.06

Rozprawa

Michael Heller*

SYNTAX–SEMANTICS INTERACTION IN MATHEMATICS**

Summary: Mathematical tools of category theory are employed to study the syntax-semantics problem in the philosophy of mathematics. Every category has its internal logic, and if this logic is sufficiently rich, a given category provides semantics for a certain formal theory and, *vice versa*, for each (suitably defined) formal theory one can construct a category, providing a semantics for it. There exists a pair of adjoint functors, Lang and Syn, between a category (belonging to a certain class of categories) and a category of theories. These functors describe, in a formal way, mutual dependencies between the syntactical structure of a formal theory and the internal logic of its semantics. Bell's program to regard the world of topoi as the *univers de discours* of mathematics and as a tool of its local interpretation, is extended to a collection of categories and all functors between them, called "categorical field". This informal idea serves to study the interaction between syntax and semantics of mathematical theories, in an analogy to functors Lang and Syn. With the help of these concepts, the role of Gödel-like limitations in the categorical field is briefly discussed. Some suggestions are made concerning the syntax-semantics interaction as far as physical theories are concerned.

Key words: philosophy of mathematics, categorical logic, syntax-semantic interaction, Bell's program, Gödel-like limitations.

---

* Copernicus Center for Interdisciplinary Studies. The Pontifical University of John Paul II in Krakow, Faculty of Philosophy. ORCID: 0000-0003-1462-6808.

** I express my gratitude to both anonymous referees for their penetrating remarks. This publication was made possible through the support of a grant from the John Templeton Foundation (Grant No. 60671).

1 Introduction

Mathematics is what mathematicians are doing when they do their work as mathematicians. They create new formalisms, formulate axioms, deduce theorems. This is more or less clear. It seems that for a philosopher who decides to interfere into the mathematicians' work, it is left only to determine syntactical rules and reconstruct everything in a logical order. However, there are important questions involved in this kind of ordering work. What mathematics is about? How do exist mathematical formalisms? Have axioms and theorems some kind of independent existence? In other words, how to cope with the semantics of mathematics? This is a vast terrain open for philosophers of mathematics.

There is an opinion that "mathematics is closed with respect to its philosophy", i.e. that it is possible to do philosophy of mathematics in a mathematical way. In last decades, mathematical category theory was the arena of enormous progress, and at the same time became a powerful tool for many philosophical investigations (see, for instance, Landry [2017]). Its impact on the philosophy of mathematics was evident almost from the very beginning. In the present work, I employ mathematical tools of this theory to face the syntax-semantics problem in the philosophy of mathematics.

It is a standard way to logically organize a mathematical theory, a theory T, say, so as to have its syntax well defined. It is also well known that every category, for instance a category C, has its internal logic, and if this logic is sufficiently rich, the category C provides semantics for the theory T. If this is the case, we can say that T is about C. Moreover, the categorical logic allows us to investigate the interaction between syntax and semantics of T. More precisely, there exists a pair of functors, Lang and Syn, from a category, belonging to a certain class of categories (for instance, coherent categories) to a category of theories, and *vice versa*, which mathematically describe this interaction. Moreover, it turns out that these functors are adjoint functors. Land and Syn describe, in a formal way, mutual dependencies between the syntactical structure of T and the internal logic of its semantics. Syntax and semantics are interwoven with each other in a manner corresponding to the adjointness of the functors Lang and Syn.

This is presented in sections 2 and 3. They contain material well known to category theorists, and the style of presentation is didactic rather than mathematically precise. For the sake of simplicity, the analyses are, in principle, restricted to the first order predicate logic. Section 2 focuses on preliminaries; section 3 penetrates more deeply into the role of functors Lang and Syn.

We are now ready to make category theory operational in the domain of the philosophy of mathematics. It was John Bell (1986) who proposed to abandon set-theoretic approach to foundations of mathematics, and to regard topos theory as the *univers de discours* for mathematics. Consequently, according to him, mathematical concepts have only local meaning (i.e. only with respect to a topos equipped with a natural numbers object [NNO], called local framework), and the truth values of mathematical statements are defined only locally (only those mathematical assertions have absolute truth values that are invariant with respect to admissible transformations between local frameworks). My proposal, rather a loose idea, is to extend Bell's program beyond the realm of topoi to the conglomerate (certainly not a category) of all categories and all functors between them. To underline an informal and indeterminate character of this conglomerate, I propose to call it "categorical *field*". Since categories have their internal logics, logic is a "local variable" in the categorical field. To the field of categories there corresponds the "field of theories", and interactions between their syntactic and semantic aspects also develop locally. Some people claim that Gödel's theorems caused crisis in mathematics, but the theorems themselves and their consequences are valid only in those categories which contain basic arithmetic, e.g. Peano's arithmetic. In the categorical field, the "crisis" has certainly only a local outreach.

This is covered in sections 4 and 5. Section 4 focuses on Bell's program and its extension to the categorical field; section 5 deals with Gödelian limitations of mathematics.

After reflecting on the nature of mathematics, the natural question is: what about physical theories? As far as they employ mathematical theories, they are subject to the same syntactic and semantical rules; the essentially new aspect is their reference to the physical world. This domain or aspect of the physical world, to which a given physical theory T refers, I propose to call natural semantics (NS) of T. It is tempting to consider two “adjoint functors”, I call them Mat and Measur, between natural semantics and physical theories, and *vice versa*, in a loose analogy with functors Lang and Syn, and use them to investigate interactions between syntactical structures of physical theories and those domains or aspects of the physical world these theories are about.

This is done in section 6. It is obvious that in this section, one must go beyond the strict formalism.

2 Categories and Logic

In this section, I start to present this material from category theory and categorical logic that is indispensable to grasp the interplay between syntax and semantics of formal theories.[1] We must first make precise what do we mean by a formal theory. The definition must be strict to enable formal manipulations, and at the same time broad enough to embrace real mathematical theories. To ensure the latter, we will assume that it is a type theory, i.e. that each of its terms is equipped with a specific type. Many mathematical theories use a single type language but category theory, for instance, uses either two type language (with objects and morphisms as types) or a single type language (with morphisms as a type). A rule assigning a type to a term is called a type assertion (for details about type, terms and formulae see Appendix). To guarantee a sufficiently broad character of the approach, we will assume that the theory in question is an axiomatic theory.

Definition 1 *A (type) theory T consists of:*

1. *a set S of types,*
2. *a set V of variables with a type assigned to each variable,*
3. *a set F of function symbols with a type assigned to each domain and codomain of every function symbol,*
4. *a set R of relation symbols with a type assigned to each argument of every relation symbol,*
5. *a set of logical symbols,*
6. *a set A of axioms (in the form adapted to the type formalism).*

[1] In doing so I essentially follow Fu (2015) with some simplifications. I also recommend reading Bell (2017).

The relation symbols may also refer to unary relations (i.e. relations having one argument); we may interpret them as properties (for details of this definition see Mac Lane, Moerdijk [1992, p. 527]). For instance, the Zermelo-Fraenkel set theory (with the axiom of choice) can be put into this form. Let us notice that not only mathematical theories can be formulated as type theories.

A sufficiently rich category C with finite limits can be made (in a canonical way) a model for any type theory T. In this way, C provides a semantics for T, the so-called categorical semantics.

Definition 2 *The categorical semantics* $[\![\cdot]\!]$ *for a theory* T *is defined in the following way:*

1. *for each type* A*,* $[\![A]\!]$ *is an object in the category* C*,*
2. *for each function symbol* f *with the types* A *and* B *for its domain and codomain, correspondingly,* $[\![f]\!]$ *is a morphism* $[\![A]\!] \longrightarrow [\![B]\!]$ *in* C*,*
3. *for each relation symbol* R *of a type* A *(with arguments of certain types) and a term* t*,* $[\![R(t)]\!]$ *is a chosen subobject* $[\![R]\!]$ *of* $[\![A]\!]$ *in* C*.*[2]

To this definition we must add all of (first order) logic which is used by T expressed in terms of $[\![\cdot]\!]$, but this is almost obvious and going deeper into this matter is not necessary for the rest of my argument (for details see Fu [2015]).

What does this mean "sufficiently rich category"? Categories have their own "internal logics", and if such a logic is too weak, it is unable to provide semantics for the theory T. Any category C with final limits can model a logic with operators $\vee$ and $\top$, but for a stronger logic more structure would be required. Usually, it is enough to consider theories formulated in the so-called coherent logic. This is a part of the first order logic using only the connectives $\wedge$ (and) and $\vee$ (or), $\top$ (true), $\perp$ (false), and the existential quantifier (for a full definition see *Coherent Logic* [2018]). A category, the internal logic of which is coherent is called a coherent category. In the coherent logic there is no difference between classical and intuitionistic logic. Moreover, large parts of mathematics can be axiomatized as coherent theories.

Let us make the concept of the internal logic for a category C precise.

[2] Technically, this means that for every relation R and any term t, $R(t)$ is the pullback of R along t (for details see Low [2013]).

Definition 3 *The internal logic of a category C is defined in the following way:*

1. *its types are objects of C,*
2. *its variables are identity morphisms in C,*
3. *its function symbols are non-identity morphisms in C,*
4. *its relation symbols are subobjects in C. If φ is a subobject of an object A in C, it can be regarded as a proposition; by analogy with the usual set theory, just think of φ as a collection of all things of type A which verify φ.*

Logical symbols are assumed as usual, and if the category C is to be regarded as a semantics for a theory T, axioms of T must be given by the order relation on the subobject poset in C.[3]

In the obvious way, internal logic of a category C defines a type theory T for which C provides the semantics. Therefore, if a statement is provable in T, it is also true in C (soundness), and *vice versa* if a statement is provable in C, it is true in T (completeness). The fact that we can "extract a type theory out of any category" (Fu, 2015) allows us to treat definition (3) as defining a functor, call it Lang, from categories to type theories. To change definition (3) into the formal definition of the functor Lang we need only to determine a suitable category of categories and a suitable category of theories between which this functor operates. If this is done, given a category C of CATEGORIES, we simply identify Lang(C) in THEORIES with the internal logic of C as it is defined in definition (3).

Let us first define the category THEORIES of theories. As it should be expected, its objects are theories and, less obviously, there is an arrow from a theory T to a theory T', $T \longrightarrow T'$, if one can express (interpret) T in terms of T' (Fu, 2015).

We also define the category CATEGORIES of categories as the collection of those categories (with corresponding functors as morphisms) that have enough structure required by definition (3) to provide semantics for theories of THEORIES (for details see: Fu [2015], *Internal Logic* [2018]). To make this rather sketchy description more concrete, we may agree to identify the category CATEGORIES with the category of coherent categories having coherent functors as morphisms.

[3] A proposition φ implies a proposition ψ if, regarded as subobjects of an object A in C, they are connected by a morphism $\varphi \hookrightarrow \psi$ in the poset of subobjects of A.

In this way, definition (3) determines the functor Lang: CATEGORIES → THEORIES. The nice thing is that we also have a functor "in the reverse direction", Syn: THEORIES → CATEGORIES. If $T \in$ THEORIES, then Syn(T) is called the syntactic category (of T). Before we define it, we should introduce some new terminology.

The pair (Γ,Φ), where Γ is a collection of type assertions[4] and Φ a collection of well defined formulae, is called a context. It is a formalization of what in ordinary language we mean by this term. In the present case, it consists of everything that has to be assumed to render a given assertion valid. When T is a mathematical theory, this practically means to explicitly determine types of all its terms.

Definition 4 *Let T be a type theory. Its syntactic category Syn(T) is defined in the following way:*

1. *its objects are contexts* (Γ,Φ),
2. *its morphisms* $(\Gamma,\Phi) \to (\Delta,\Psi)$ *are interpretations of variables, i.e. for each type, prescribed by* Δ, *we must be able to construct an element of this type out of data contained in* Γ. *We also must, for each assumption required by* Δ *(if there are any) present a proof of this assumption out of assumptions contained in* Γ.[5]

Syn(T) is also called a category of contexts (for details and examples see *Syntactic Category* [2018]). From a theory T we have constructed the category Syn(T). For all practical purposes T and Syn(T) are the same, but Syn(T) is less dependent on the language than T, in the following sense: let T and T' be two type theories having different structures (therefore, they differ as far as the language is concerned), but Syn and Syn(T) may be equivalent as categories. If the latter is the case, the theories T and T' are said to be Morita equivalent.[6] Usually, theories

[4] For instance, $\Gamma = \{x_1{:}A_1,\ldots,x_n{:}A_n\}$ assigns types $A_1,\ldots,A_n$ to variables $x_1,\ldots,x_n$, respectively.

[5] More precisely, if $\Gamma = \{x_1{:}A_1,\ldots,x_n{:}A_n\}$ and $\Delta = \{y_1{:}B_1,\ldots,y_n{:}B_n\}$ are two contexts, then a morphism $(\Gamma,\Phi) \to (\Delta,\Psi)$ is a collection of terms $\Gamma \vdash t_1{:}B_1,\ldots, \Gamma \vdash t_n{:}B_n$. This means that to give this morphism we must give, for each type, or assumption, required by Δ, a method to construct an element of that type, or a proof of that assumption, from the data or assumptions given by Γ.

[6] Morita equivalence is usually defined without mentioning syntactic categories; for instance, two theories are said to be Morita equivalent just in case their classifying toposes are equivalent (Tsementzis, 2015). Originally, Morita equiva-

are regarded just equivalent if they are Morita equivalent (for details and discussion see Halvorson, Tsementzis [2017]). In such a case, one defines a morphism between theories T and T' to be a functor between their syntactic categories $\mathrm{Syn}(T) \to \mathrm{Syn}(T')$. "Moreover, the fact that the syntactic category is defined »syntactically« means that a morphism $T \to T'$ actually induces a »translation« of the types, functions, and relations of T into those of T'" (*Internal Logic*, 2018).

It turns out that the functors Syn and Lang are adjoint functors. Since the object Syn(T) in CATEGORIES provides a semantics for the theory T, and the object Lang(C) in THEORIES provides a syntax for the category C, the adjointness of these two functors determines a strict interaction between semantics and syntax. This can be seen from the two following formulae

(1) $\mathrm{Syn}(\mathrm{Lang}(C)) \to C$,

(2) $T \to \mathrm{Lang}(\mathrm{Syn}(T))$,

with both morphisms natural (in the sense of category theory), which formally express the adjointness of Syn and Lang functors.

As these two formulae are heavy with meaning, they call for a deeper attention.

3 Theories and Functors

Let us start with formula (1). We construct, by following instructions contained in definition 3, the internal logic of a category C, that is to say a theory $T_C = \mathrm{Lang}(C)$ for which C provides a semantics. The objects of C are types, its identity morphisms are variables, etc. But the theory T_C should also satisfy some axioms. We inductively define an interpretation of each term (as a morphism in C) which may be constructed in T_C, and then we define (also inductively) an interpretation of each formula (as a subobject in C), which may be constructed in C (see *Internal Logic* [2018]).[7]

lence was defined in the algebraic ring theory: two associative rings R and S with units are Morita equivalent if the category of (left) modules over R and the category of (left) modules over S are equivalent.

[7] For instance, in the case of group theory, there exist two arrows $G \times G \times G \to G$, which are interpretations of the following terms: $m(m(x,y),z)$ and $m(x,m(y,z))$ (the law of associativity).

The category C contains logical tools able to express various axiomatics for the theory T_C; in other words, it potentially contains all possible axiomatics for T_C. The internal logic Lang(C) is not only a way to describe the internal structure of C, but it also provides tools to prove (by "internal reasoning" in C) things in C that are provable in T_C (this is a content of the soundness theorem). The idea is to start with the axioms of a given type theory and make deductions from them by using standard methods, "which in practice amounts to pretending that the types are sets, the function symbols are functions, and the relation symbols are subsets", then we are entitled to conclude that "anything we prove will still be true when the theory is interpreted in an arbitrary category" (*Internal Logic*, 2018). Obviously, one is allowed to employ only those logical rules that are permitted by the logic appropriate to a given category; for instance, if we are working with a coherent theory, we must use rules of coherent logic.

We now construct the category Syn(Lang(C)) = Syn(T_C). It is a category whose objects are contexts, and morphisms are interpretations. Formula (1) tells us that "there is always a canonical model of the internal logic of C within C" (Fu, 2015). We can abbreviate Syn(T_C) to C_{T_C}. What can be proved in C_T, is true in all models of T (Fu, 2015, Theorem 3.2).

Similar analysis can be carried out starting from formula (2), which can be written as $T \to T_{C_T}$. It turns out that the theory T_{C_T} is Morita equivalent to T (Tsementzis, 2015).

The above analysis shows a close interaction between syntax and semantics. This can intuitively be seen in natural languages, but here – for formal languages, in particular for formal mathematical languages – this is put into a nice formal interplay. It has the form of adjoint functors. This means that the morphism $C \to \mathrm{Syn}(T)$ corresponds to a morphism $\mathrm{Lang}(C) \to T$, and this correspondence is an isomorphism which is natural in $C \in$ CATEGORIES and $T \in$ THEORIES. This is written in the form

(3) $\quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{CATEGORIES}}(C, \mathrm{Syn}(T)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{THEORIES}}(\mathrm{Lang}(C), T).$

The natural isomorphism $\cong$ plays an essential role in any adjunction situation.[8] It says that when C varies in CATEGORIES and T varies

[8] For a full definition of adjoint functors see any textbook on category theory.

in THEORIES, the isomorphism between morphisms Lang(C) $\to T$ in THEORIES and $C \to$ Syn(T) in CATEGORIES varies in a way that is compatible with composition of morphisms in CATEGORIES and THEORIES, correspondingly, and with the actions of Lang and Syn (Leinster, 2014). If we have in mind the meaning of functors Lang and Syn, we can see how intimately semantics and syntax interact with each other.

Formula (3) preserves its validity if theory T is everywhere replaced by a theory T' Morita equivalent to T. This means that a given theory can be expressed in various languages without changing its essential content.

Traditionally, one sharply distinguishes syntax and semantics. "This distinction is at the same time an epistemological and an ontological distinction, or at least it is motivated by epistemological and related ontological elements" (Marquis, 2010, p. 234). Syntax represents "the »concrete« facets of language and its epistemic accessibility is a crucial element", whereas semantics "is the world of »entities« syntactical expressions are supposed to refer to" (ibid.). Category theoretical approach fully respects this distinction, but is at the same time able to show nuances of their interactions with each other that were transparent to traditional logical tools. Loosely speaking, we not only have dependencies going from semantics to syntax, and *vice versa*, but since Lang and Syn are adjoint functors, these dependencies determine each other up to a unique natural equivalence.

4 The Extended Bell's Program

Material presented in the previous sections invites mathematically informed thinkers to draw some philosophical implications from it. Exactly this material inspired John Bell to develop a new approach to the philosophy of mathematics (Bell, 1981, 1986). "The fundamental idea is to abandon the unique absolute universe of sets central to the orthodox set-theoretic account of foundations of mathematics, replacing it by a plurality of local mathematical frameworks – *elementary toposes* – defined in category-theoretical terms" (Bell, 1986). Consequently, mathematical concepts lose their absolute meaning, and mathematical assertions their absolute truth values. Their meanings and truth values are defined locally, with respect to local frameworks, where by a local framework Bell understands a topos equipped with a natural numbers object (commonly abbreviated to NNO). When one changes from one local framework to another local framework, the meanings of concepts and truth values of assertions change accordingly. Formally, a change from one local framework to another is done with the help of what Bell calls admissible transformations. If E and F are local frameworks, an admissible transformation $f : E \to F$ is a pair of adjoint functors $f^*: E \to F$ and $f_* : F \to E$.

The analogy of this "philosophy" with that of the theory of relativity is evident. And as in special relativity, statements that are invariant with respect to Lorentz transformations are regarded as physical laws, statements that are invariant with respect to admissible transformations are regarded as mathematical laws. Since the internal logic of topoi is intuitionistic logic, "the invariant mathematical laws are those which are demonstrable *constructively*" (Bell, 1986).

Such a fundamental concept as that of real number is an example of a concept that changes depending on a local framework. Let $f : S \to \mathrm{Sh}(X)$ be an admissible transformation from a topos S to the topos $\mathrm{Sh}(X)$ of sheaves on a topological space X (both these topoi are local frameworks). What from the point of view of $\mathrm{Sh}(X)$ is a "real number", from the point of view of S is a continuous real valued function on X, and the viewpoint is changing with the help of f.

Of course, in this game logic is involved from the very beginning. Topoi are the models for theories that are formulated in many-typed languages. "Each topos **E** is associated with such a language whose types match the objects of **E** and whose function symbols match the arrows of **E**. A theory in such a language is a set of sentences closed under intuitionistically valid deductions" (Bell, 1986). As we can see, our analysis, made in previous sections, fully applies to this case. And precisely here there appears a possibility to generalise Bell's program.[9] The limitation to topoi is justified only as far as one is concerned with details (such as local frames and admissible transformations), making the program concrete and possibly workable, and this was precisely Bell's goal. However, if one is concerned with the philosophy of mathematics as such, this limitation is neither wanted, nor useful.

[9] I call it a program, although, as far as I know, it never went beyond the original formulation.

It seems that Bell included the existence of NNO into the definition of a local framework since one could hardly imagine a mathematical theory without a counterpart of natural numbers, i.e. without something with the help of which one could count things. But even among topoi there are some in which "counting" is done with the help of an object different from NNO. For instance, in the so-called Zariski topos and Basel topos, in spite of the fact that the NNO does exist in them, the role of natural numbers is better fulfilled by the so-called smooth numbers (Moerdijk, Reyes, 2010, pp. 252, 289).[10] Therefore, in general, the insistence on the existence of NNO does not seem necessary.

Moreover, there are interesting domains of mathematics whose logic goes beyond intuitionistic logic, and consequently beyond the topos theory. If one wants to remain within a relatively well explored territory, one should mention the cotopos theory with its paraconsistent (or inconsistency-tolerant) logic. It is constructed by dualizing the usual topos theory (Angot-Pellissier, 2015; Estrada-González, 2014).[11] As it is well known, the algebra of open sets of a topological space (with negation of a proposition p defined as the interior of the complement of an open set corresponding to p[12]) is a model of intuitionistic logic, and generates a Heyting algebra. By dualizing this construction, we obtain the algebra of closed sets of a topological space (with negation defined as the closure of the complement of a given closed set) which is a model of the paraconsistent logic. It generates a co-Heyting algebra, called also Brouwer algebra.[13]

Mathematical theories, which can find their semantics in cotopoi, are not necessarily some exotic mathematical structures. For instance,

---

[10] In these topoi, when one uses NNO, the interval $[0,1]$ of $\mathbb{R}$ is non-compact and the object R is non-Archimedean (here $R = C^\infty(\mathbb{R})$; R is non-Archimedean, if the following axiom is not satisfied: $\forall(x \in R)\exists(n \in \mathbb{N})\ x < n$). When one uses smooth numbers, both these "pathologies" disappear. The price is, however, the weakening of arithmetic and logic.

[11] In Estrada-González (2014) cotopoi are called complement-topoi.

[12] The complement of an open set, representing negation in classical logic, is not open.

[13] One must be careful: performing the dualization is not mechanical. For instance, the co-exponential object, that must exist in cotopoi, is not related to implication, as it is the case with the exponential object in topoi, but to a connector called pseudo-difference.

the theory of partial inner product spaces is a good mathematical theory with interesting applications and the paraconsistent logic as its internal logic. This theory unifies some structures of functional analysis, such as generalized functions and scales on Hilbert or Banach spaces (Antoine, 1980; Antoine, Lambert, Trapani, 2011; Antoine, Trapani, 2009, 2010).

Let us then extend Bell's program beyond local frameworks and admissible transformations to any categories and functors between them. It is no longer a program but rather an idea, the aim of which is to organize certain intuitions related to the philosophy of mathematics. To the conglomerate of all categories and all functors between them we attach the label the *field of categories* (or *categorical field*). The label of *field* is intended to emphasize an undetermined character of this conglomerate (it is obviously not even any kind of "category of categories"). For some concrete purposes we might narrow it to certain of its subfields; for instance to n-categories, for some n, to coherent categories, to all topoi, etc.

The categorical field is not only a huge collection of categories, but also a highly dynamic entity with a lot of interactions given by functors between categories. To better emphasize this dynamical character of the categorical field, we could adopt the point of view of the one-type category theory. In this point of view, the categorical field is a field of "pure activity", consisting only of functors (with identity functors playing the role of categories [Heller, 2016]).

Let us notice that in the categorical field logic is a "local variable", in the sense that each category has its internal logic. To the field of categories there corresponds the "field of mathematical theories", and functors Lang and Syn are responsible for organizing the interaction between syntax and semantics of mathematical theories.

It goes without saying that the concept of the categorical field is far from being a well defined mathematical (or metamathematical) concept. And it is not intended to be. I think, it shows in the new light the nature of mathematics on its most global scale, and testifies to the capability of the category theory in disclosing deep structural aspects of mathematics.

5 Gödelian Limitations

Our next excursion into philosophical consequences of the categorical field idea is connected with Gödel's theorems. Putnam, in his paper "Mathematics without Foundations", quotes a not uncommon opinion according to which "Gödel's theorem suggests that the truth or falsity of some mathematical statements might be impossible in principle to ascertain", and remarks that "this has led some to wonder if we even know what we mean by »truth« and »falsity« in such a context" (Putnam, 1967). Indeed, one often hears about the crisis at the foundations of mathematics. Let us take a closer look at this problem. As it is well known, Gödel's theorems demonstrate the inherent limitations of every formal axiomatic system containing basic arithmetic (such as Peano axiomatic system). The first Gödel theorem states that no such axiomatic system can prove all truths about the arithmetic of natural numbers: there will always be true statements about natural numbers that cannot be proved within this axiomatic system. The second Gödel theorem demonstrates that no such axiomatic system can prove its own consistency.

These theorems are often interpreted as showing the collapse of the Hilbert program, the aim of which was to formulate a complete and fully consistent set of axioms for the whole of mathematics. This was supposed to be a remedy for the critical situation in the foundations of mathematics after recently discovered inconsistencies and paradoxes. After Gödel's theorem the crisis even deepened.

Gödel's achievement paved the way for further discoveries. Let us mention Tarski's theorem on the formal undefinability of truth, Church's theorem that Hilbert's *Entscheidungsproblem* is unsolvable, the Löwenheim–Skolem theorem, stating that if a theory has an infinite model, then it has an infinite number of other models, and Turing's theorem that there is no algorithm for solving the halting problem (for all these theorems see Smith [2007]).

If we agree to look at mathematics as at the field of categories, and take into account the fact that logic is a "local property" of the field (i.e. internal logic changes depending on category), then it becomes clear that the "Gödelian crisis" is also only a local effect. Or more prosaically: Gödel's theorems and their consequences are valid only in categories which contain basic arithmetic (for the sake of concreteness, let us think about Peano's arithmetic). Peano's arithmetic itself can be formulated as a type theory, and it can be shown that Peano's axioms hold in any topos, i.e. they are available in the internal language of any topos (Lambek, Scott, 1986, p. 145), and each topos, in which Peano's axioms hold, has an NNO (p. 189). However, there are many categories, having NNO, in which Peano's axioms do not hold (Awodey, 2010, p. 246).

The conclusion is that there are vast domains of mathematics, outside of the world of topoi, which are immune to Gödel-type limitations.[14] The Hilbert program cannot be revived not so much because of Gödel's theorems, but rather because of the nature of the categorical field, in which logic is but a "local variable".

6 Beyond The Formalism

My main concern in the previous sections was about formalised mathematical theories and what the theories are about (their semantics). In the present section, I want to introduce into the orbit of my interest physical theories. Their linguistic (syntactic) aspect does not differ much from that of mathematical theories (although physical theories are rather seldom fully formalised), and their categorical semantics could in principle be constructed. The essentially new aspect, when dealing with them, is the reference to the physical world.

In the philosophy of science, there are two main approaches to scientific theories: the syntactic approach and the semantic approach. Roughly speaking, the syntactic approach regards scientific theories more or less in the spirit of Definition 1, section 2. It emerged out of classical works of Carnap (1937), Hempel (1966) and other authors remaining under the influence of Logical Positivism. Scientific theories are sets of sentences in the language of a given science which should be subject to the logical analysis. This approach, once known as the "received view", met later with a strong criticism as being faraway from the scientific practice. According to its rival view, the so-called

[14] The above remarks inspire the following idea. As it is well known, any formalized axiomatic system can be organized as a category (with axioms and theorems as objects and deduction chains as morphisms). It would be interesting to investigate the internal logic of such categories, for instance, the internal logic of the category of the Peano axiomatic system.

semantic approach, propagated by Suppes (1960), van Fraassen (1989) and others, a scientific theory should be reconstructed in terms of the class of its models, and by taking into account its mathematical apparatus rather than predicate logic.

In the light of the analysis carried out in the preceding sections, it is clear that to base our approach to theories on an opposition between syntactic and semantic view is unjustified. As we have seen, in formal mathematical theories, syntax and semantics strongly interact with each other (via the Lang and Syn functors), and there is no reason to suspect that in not fully formalised mathematical and physical theories things are much different. Already Halvorson and Tsementzis (2017) have persuasively argued that a categorical approach to the problem of scientific theories "can transcend the syntax-semantics dichotomy in 20th century philosophy of science".

Let us notice, however, that having a formalized theory T, we – so to speak artificially – create the category C providing the semantics for T. Loosely speaking, the theory T is about what happens in C. Relations (1) and (2) describe interaction between syntax and semantics of T. Let now T be a physical theory. Of course, we could in principle reconstruct its formal semantics, but doing physics in this way would be impractical, especially as far as more advanced physical theories are concerned. Usually, physicists think about their theories as being about a certain domain of physical reality. By using analogy with our previous analyses, let us try to reconstruct the interaction between the structure of a mathematized physical theory T and its "natural semantics" NS, i.e. the domain of the physical world the theory T investigates. It goes without saying that the following reconstruction is both informal and simplified. The process of reconstruction, that will be sketched here, is usually extended in time. The "we", appearing in this description, could denote several generations of investigators.

The process starts with the delineation of this domain or aspect of the world that will become an NS for the future theory T (in fact, this process is not completed until the theory T is formulated; in what follows, we disregard the time factor).

The initial information about NS consists of the so far existing knowledge and what can be termed "learned intuition". Basing on this, one tries to reconstruct an internal logic inherent in NS, by using various methods. The logic being reconstructed is implemented into the language of mathematics rather than into a logically informed language. The result of this – usually, long and laborious – process is a mathematized physical theory T. The process of its creation can schematically be presented (in a loose analogy with the functor Lang) as a "functor"

Mat: Natural Semantics → Physical Theories.

"Functor" (in quotes) because neither "Natural Semantics" nor "Physical Theories" is a category.

Having the theory T, we deduce from it some dependencies between measurable quantities (observables). We might say that when doing so we define (in a loose analogy to the functor Syn) a "functor"

Measur: Physical Theories → Natural Semantics.

We perform actual measurements in NS, that is we test the physical theory T, and obtain a new information about NS.

In this way, the theory T represents, in a sense, its natural semantics SN. Obviously, between T and NS there is neither an identity, nor any kind of isomorphism, but rather some sort of adjointness (again in a loose analogy with the adjoint functors Lang and Syn). Owing to this adjointness, we are entitled to assume that what has been proved in T, has its counterpart in NS. This is how physical theories enrich our knowledge of the world.

Appendix: Many Type Theory

Many type theory is given by

1. a collection $S = \{X,Y,\ldots\}$ of types;
2. a collection $F = \{f,g,\ldots\}$ of function symbols; each function symbol is given together with the types of its arguments and the type of its value;
3. a collection $R = \{U,W,\ldots\}$ of relation symbols; each relation symbol is given together with the types of its arguments
4. and possibly a collection of constants: $a,b,\ldots$, each constant together with its type.

It is also assumed that each type X has infinitely many variables: $x_1, x_2, \ldots$ of this type. Then one builds up terms and formulae of the theory in the following way

- Each variable (or constant) of type X is a term of this type.
- Suppose $t_1, \ldots, t_n$ are terms of types $X_1, \ldots, X_n$, and $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ is a function symbol, then $f(t_1, \ldots, t_n)$ is a term of type Y.
- If $R \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n$ is a relation symbol having arguments of types $X_1, \ldots, X_n$ and $t_1, \ldots, t_n$ are terms of types $X_1, \ldots, X_n$, then $R(t_1, \ldots, t_n)$ is an atomic formula.
- If t and t' are of the same type, then $t = t'$ is an atomic formula.
- The symbols $\top$ (true) and $\bot$ (false) are atomic formulae.

Having atomic formulae, one constructs more complicated formulae with the help of the connectives $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$, and quantifiers $\forall$, $\exists$ in the standard way. For details see Mac Lane, Moerdijk (1992, pp. 527–530).

REFERENCES

Angot-Pellissier, R. (2015). The Relation Between Logic, Set Theory and Topos Theory as It Is Used by Alain Badiou. In: A. Koslow, A. Buchsbaum (Eds.), *The Road to Universal Logic* (pp. 181–200). Basel: Birkhäuser.

Antoine, J-P. (1980). Partial Inner Product Spaces. *Journal of Mathematical Physics*, *21*(8), 2067–2079.

Antoine, J-P., Lambert, D., Trapani, C. (2011). Partial Inner Product Spaces: Some Categorical Aspects. *Advances in Mathematical Physics*.

Antoine, J-P., Trapani, C. (2009). *Partial Inner Product Spaces: Theory and Applications*. Berlin: Springer.

Antoine, J-P., Trapani, C. (2010). Partial Inner Product Space Method: A Quick Overview. *Advances in Mathematical Physics*.

Awodey, S. (2010). *Category Theory*. Oxford: Oxford University Press.

Bell, J. L. (1981). Category Theory and the Foundations of Mathematics. *British Journal for the Philosophy of Science*, *32*(4), 349–358.

Bell, J. L. (1986). From Absolute to Local Mathematics. *Synthese*, *69*(3), 409–426.

Bell, J. L. (2017). Categorical Logic and Model Theory. In: E. Landry (Ed.), *Categories for the Working Philosopher* (pp. 113–135). Oxford: Oxford University Press.

Carnap, R. (1937). *The Logical Syntax of Language*, London: Kegan Paul.

Coherent Logic. (2018). In: *nLab*. Retrieved from: https://ncatlab.org/nlab/show/coherent+logic

Estrada-González, L. (2014). Complement-Topoi and Dual Intuitionistic Logic. *Australian Journal of Logic*, *9*, 26–44.

Fu, Y. (2015) Category Theory, Topos and Logic: A Quick Glance. Retrieved from: http://charlesfu.me/repository/topos.pdf

Goldblatt, R. (2006). *Topoi. The Categorical Analysis of Logic*. Mineola, N.Y.: Dover Publ.

Halvorson, H., Tsementzis, D. (2017). Categories of Scientific Theories. In: E. Landry (Ed.), *Categories for the Working Philosopher* (pp. 402–429). Oxford: Oxford University Press.

Heller, M. (2016). Category Free Category Theory and Its Philosophical Implications. *Logic and Logical Philosophy*, *25*(4), 447–459. DOI: 10.12775/LLP.2016.013

Hem, C. (1966). *Philosophy of Natural Science*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Internal Logic. (2018). In: *nLab*. Retrieved from: https://ncatlab.org/nlab/show/internal+logic

Lambek, J., Scott, J. P. (1986). *Introduction to Higher-Order Categorical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Landry, E. (Ed.). (2017). *Categories for the Working Philosopher*. Oxford: Oxford University Press.

Leinster, T. (2014). *Basic Category Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Low, Z. L. (2013). Logic in a Topos. Retrieved from: http://zll22.user.srcf.net/talks/2013-01-24-InternalLogic.pdf

Mac Lane, S., Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer.

Marquis, J-P. (2010). *From a Geometrical Point of View. A Study of the History and Philosophy of Category Theory*. Berlin/Heidelberg: Springer Science+Business Media.

Moerdijk, I., Reyes, G. E. (2010). *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, New York, Berlin, Heidelberg: Springer.

Putnam, H. (1967). Mathematics without Foundations. *The Journal of Philosophy*, *6*(1), 5–22.

Smith, P. (2007). *An Introduction to Gödel Theorem*, Cambridge: Cambridge University Press.

Suppes, P. (1960). A Comparison of the Meaning and Uses of Models in Mathematics and the Empirical Sciences. *Synthese*, *12*(2/3), 287–301.

Syntactic Category. (2018). In: *nLab*. Retrieved from: https://ncatlab.org/nlab/show/syntactic+category

Tsementzis, D. (2015). A Synthetic Characterization of Morita Equivalence. Retrieved from: https://arxiv.org/pdf/1507.02302.pdf

van Fraasen, B. (1989). *Laws and Symmetry*. New York: Oxford University Press.

Studia Semiotyczne, t. XXXII, nr 2 (2018), s. 107–129
ISSN 0137-6608, e-ISSN 2544-073X
DOI: 10.26333/sts.xxxii2.07
Rozprawa

Krzysztof Wójtowicz*

KATEGORIA WYJAŚNIANIA W FILOZOFII MATEMATYKI KURTA GÖDLA[1]

Streszczenie: Artykuł dotyczy zagadnienia, w jakim sensie można stosować kategorię wyjaśnienia (charakterystyczną raczej dla nauk empirycznych) do interpretacji filozofii matematyki Kurta Gödla. Gödel – jako realista matematyczny – twierdzi bowiem, że w wypadku matematyki mamy do czynienia z niezależnymi od nas faktami. Jednym z owych faktów jest właśnie rozwiązywalność wszystkich dobrze postawionych problemów matematycznych – i ten fakt domaga się wyjaśnienia. Kluczem do zrozumienia stanowiska Gödla jest identyfikacja założeń, na których się opiera: (1) metafizyczny realizm: istnieje uniwersum matematyczne, ma ono charakter obiektywny, niezależny od nas; (2) optymizm epistemologiczny: jesteśmy wyposażeni w wystarczająco dobre środki poznawcze, aby uzyskać wgląd w owo uniwersum. Pojęcie rozwiązania problemu matematycznego Gödel rozumie znacznie szerzej niż jako podanie matematycznego dowodu – chodzi raczej o znalezienie wiarogodnych aksjomatów, prowadzących do rozwiązania. Stawiany w artykule problem analizuję na przykładzie hipotezy kontinuum.

Słowa kluczowe: realizm matematyczny, wyjaśnianie w matematyce, twierdzenia o niezupełności, uniwersum matematyczne, hipoteza kontinuum.

Jedną z tez stawianych przez Gödla jest teza o rozwiązywalności wszystkich dobrze postawionych problemów matematycznych. Z punktu widzenia doświadczeń w zakresie „codziennej" matematyki

* Uniwersytet Warszawski, Instytut Filozofii. E-mail: wojtow@uw.edu.pl. ORCID: 0000-0002-1187-8762.

[1] Artykuł został napisany w ramach grantu NCN 2016/21/B/HS1/01955.

(w tym szkolnej), teza ta wydaje się oczywista: każde zadanie da się rozwiązać, nawet bardzo trudne problemy otwarte w końcu ustępują pod naporem wysiłków generacji matematyków.

Jednak to przecież Gödel jest autorem twierdzenia, zgodnie z którym dla każdej (rozsądnej) teorii T istnieją zdania, które w tej teorii są nierozstrzygalne. Jak pogodzić ów wynik z jego tezą o powszechnej rozwiązywalności problemów? Aby odpowiedzieć na to pytanie, konieczna jest pewna eksplikacja pojęcia rozwiązania problemu matematycznego. Wtedy możliwe będzie przeanalizowanie tezy, zgodnie z którą każdy problem miałby być rozstrzygalny. Jak to wyjaśnić – i jakie wyjaśnienie tego stanu rzeczy podaje Gödel?

Sądzę, że użycie tutaj kategorii wyjaśniania jest zasadne. Jest ono coraz częściej i szerzej dyskutowane w odniesieniu do matematyki – tutaj będzie miało pewną specyfikę, jednak sądzę, że jego użycie pozwoli rzucić nowe światło na zagadnienie.

Artykuł ma następującą strukturę:

1. Filozofia matematyki Gödla
2. Problem wyjaśniania w matematyce
3. Przykład hipotezy kontinuum
4. Podsumowanie

W części 1. wskazuję podstawowe elementy filozoficznego światopoglądu Gödla. Prezentacja jest oczywiście – z konieczności – skrótowa. W części 2. formułuję podstawowe pytania, jakie stawiane są w debacie, wspominam także krótko o problemie matematycznych wyjaśnień w naukach przyrodniczych – oraz formułuję tytułowe pytanie/a. Część 3. poświęcona jest analizie zagadnienia na podstawie standardowego i znanego przykładu – a mianowicie hipotezy kontinuum. Artykuł kończy się krótkim podsumowaniem.

1. Filozofia matematyki Gödla[2]

Gödel był niejako wzorcowym platonikiem matematycznym. Jego zdaniem istnieje obiektywne, niezależne od nas matematyczne uniwersum, które jest opisywane (choć oczywiście w niedoskonały sposób)

[2] Jest to bardzo szkicowa i skrótowa prezentacja. Szczegółowa analiza stanowiska filozoficznego Gödla zawarta jest np. w pracach Krajewskiego (2003) i Wójtowicza (2002).

przez teorie matematyczne – i do którego mamy dostęp poznawczy przez swoistą intuicję[3]. Gödel skupiał się na teorii mnogości, i jego filozoficzne analizy odwołują się często do teorii mnogości[4].

Poglądy Gödla dotyczące natury matematyki w naturalny sposób łączą się z szerszą wizją, dotyczącą roli i natury filozofii. Gödel podkreślał znaczenie analiz o charakterze fundamentalnym, w szczególności analiz dotyczących znaczenia podstawowych pojęć metafizycznych. Miał nawet nadzieję, iż pojęcia te będzie mógł opisać w sposób zaksjomatyzowany[5]. Warto podkreślić wyraźną opozycję wobec dominującej wówczas neopozytywistycznej wizji matematyki (i filozofii, w szczególności metafizyki). Gödel twierdził wręcz, że „duch czasów" (*Zeitgeist*) nie jest przychylny dla jego poglądów, zgodnie z którymi rozważania metafizyczne są sensowne, a matematyka nie jest składnią języka nauki, lecz wyraża obiektywne prawdy. Konwencjonalizm nie jest więc dobrym wyjaśnieniem natury matematyki; konwencje są oczywiście w matematyce obecne, jednakże nie mają charakteru arbitralnego, lecz – mówiąc swobodnie – oddają istotę pojęć i wyrażają obiektywne prawdy[6].

---

[3] „Niezależnie jednak od tego, że obiekty teorii mnogości są tak odległe od doświadczenia zmysłowego, w jakiś sposób je postrzegamy, o czym świadczy fakt, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe. Nie widzę żadnych racji, dla których mielibyśmy mieć mniejsze zaufanie do tego rodzaju percepcji, to znaczy do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej, która skłania nas do budowania teorii fizycznych i do oczekiwania, że przyszłe dane zmysłowe będą z nimi zgodne oraz do wiary w to, że pytania, które są teraz nierozstrzygalne, zostaną być może rozstrzygnięte w przyszłości" (Gödel, 1964, s. 120–121).

[4] Filozoficzny światopogląd Gödla miał wyraźne odbicie w decyzjach o charakterze metodologicznym, dotyczących tego, w jaki sposób (jakimi metodami) można uprawiać matematykę. Gödel deklarował, że przekonanie o istnieniu obiektywnego świata matematycznego stanowiło motywację do swobodnego posługiwania się metodami niekonstruktywnymi, opartymi o silne założenia o istnieniu obiektów pewnego typu.

[5] Dowody Gödla na istnienie Boga można uznać za próbę tego typu precyzacji. Wang mówi o rozmowie Gödla z Carnapem w dniu 13.09.1940 (1987, s. 217), której przedmiotem była metafizyka, w szczególności utworzenie spójnej doktryny metafizycznej, opartej na pojęciach Boga i duszy jako pierwotnych. O ile zdaniem Carnapa teoria taka miałaby raczej charakter mitologiczny, o tyle stanowisko Gödla jest zupełnie inne. Twierdzi on bowiem, że teoria taka mogłaby być nie mniej sensowna niż fizyka teoretyczna, której także nie da się wyrazić w terminach czysto obserwacyjnych.

[6] Dyskusji z „interpretacją syntaktyczną" poświęcona jest np. praca, w której Gödel pisze: „[N]iezależnie od tego, jak będą formułowane reguły syntaktyczne, moc i użyteczność powstającej w ten sposób matematyki jest proporcjonalna do

Niekiedy stanowisko Gödla przedstawia się jako wyraz pewnego rodzaju dogmatyzmu – poprzez pewnego typu „akt wiary" postulujemy istnienie uniwersum matematycznego, do którego odnoszą się zdania matematyki. Stanowisko takie przypominałoby „roboczą hipotezę" wielu matematyków – tych, którzy na odwiecznie pytanie o to, czy matematykę się odkrywa czy tworzy, odpowiadają, iż odkrywa (co jest spójne ze stanowiskiem realizmu, a nawet może być wręcz interpretowane jako jedno ze sformułowań stanowiska realistycznego). Byłby to wyraz pewnego typu naturalnej postawy ontologicznej matematyka – jednak bez głębszego uzasadnienia[7]. Jednak Gödel nie przyjął tego stanowiska oczywiście w sposób dogmatyczny czy bezrefleksyjny. Warto odnotować dość nietypowy – biorąc pod uwagę koncepcję Gödla – i chyba mało znany cytat: „[N]asze aksjomaty, jeśli mają być interpretowane jako zdania posiadające treść, w konieczny sposób zakładają rodzaj platonizmu, który nie może zadowolić żadnego krytycznego umysłu" (Gödel, 1933, s. 50)[8].

Tego typu sceptycznych wypowiedzi nie znajdziemy u Gödla zbyt wiele, jednak dokumentują one fakt, że Gödel miał świadomość tego, iż przyjęcie stanowiska realistycznego wymaga uzasadnienia (i oczywiście też doprecyzowania – gdyż realizm może przyjmować bardzo różne formy). Świadczyć to może o pewnej ewolucji poglądów Gödla. Bardzo wyraźnie pisze o tym:

---

mocy intuicji matematycznej koniecznej do udowodnienia dopuszczalności tych systemów. [...] jest jasne, że intuicja matematyczna nie może zostać zastąpiona przez konwencje, ale jedynie przez konwencje plus intuicję matematyczną" (Gödel, 1953/9, s. 358).

[7] „Gdy jednak uprawiam matematykę, mam subiektywne odczucie, że istnieje realny świat, który należy odkryć: świat matematyki. Ten świat jest dla mnie znacznie bardziej nieprzemijający, niezmienny i rzeczywisty niż fakty rzeczywistości fizycznej" (L. Bers, w: [Hammond, 1983, s. 31]). Hardy: „Osobiście zawsze uważałem matematyka w pierwszym rzędzie za obserwatora, człowieka, który obserwuje odległe pasmo górskie i odnotowuje swoje obserwacje. Jego zadaniem jest jasne wyodrębnienie i opisanie innym tak wielu szczytów, jak tylko jest to możliwe" (Hardy, 1929, s. 18). Cantor mówił o sobie jako o sprawozdawcy wyników swoich badań. Owych matematyków łączy więc przekonanie, iż świat bytów matematycznych istnieje obiektywnie – a my go jedynie odkrywamy. Oczywiście nie twierdzę, iż stanowisko to jest jedynym – a nawet, że jest stanowiskiem dominującym wśród matematyków, to jednak odrębna kwestia.

[8] W tym miejscu oraz w reszcie tekstu tłumaczenia moje, chyba że zaznaczono inaczej.

> Konieczne jest założenie pewnego korpusu bezwarunkowych prawd matematycznych, ponieważ, nawet jeśli matematykę traktować będziemy jako system hipotetyczno-dedukcyjny, nadal zdania stwierdzające, iż aksjomaty implikują pewne twierdzenia są bezwarunkowo prawdziwe.
>
> Obszar bezwarunkowych prawd matematycznych jest zakreślany w różny sposób przez różnych matematyków. Można wyróżnić co najmniej osiem stanowisk. [...]: (1) klasyczna matematyka w szerokim sensie (z włączeniem teorii mnogości), (2) klasyczna matematyka w węższym sensie, (3) semiintuicjonizm, (4) intuicjonizm, (5) konstruktywizm, (6) finityzm, (7) ograniczony finityzm, (8) implikacjonizm (Gödel, 1953/9, s. 346).

Strategia argumentacyjna Gödla polega na przyjęciu pewnej słabej wersji realizmu jako założenia wyjściowego – i następnie stopniowemu wzmacnianiu stanowiska przez wskazywanie stosownych argumentów. Teoria liczb jest naturalnym wyborem owego wyjściowego założenia, gdyż jest ona fundamentalna w matematyce – i powszechnie znana. Zdania teorii liczb wydają się wyrażać obiektywne treści[9]. Przyjęcie obiektywizmu w odniesieniu do zdań teorii liczb wydaje się być stosunkowo mało kontrowersyjne. Mówi o tym wyraźnie następujący cytat:

> Logika i matematyka – jak fizyka – opiera się na aksjomatach posiadających rzeczywistą treść [...]. To, że taka rzeczywista treść istnieje widoczne jest poprzez badanie teorii liczb. Stykamy się z faktami, które są niezależne od jakichkolwiek konwencji. Te fakty muszą posiadać treść, ponieważ niesprzeczność teorii liczb nie może być oparta na trywialnych faktach. [...] Jest słaba forma platonizmu, której nikt nie może zaprzeczyć. [...] Gdy porównamy hipotezę Goldbacha z hipotezą kontinuum, jesteśmy w większym stopniu przekonani, że pierwsza z nich musi być prawdziwa albo fałszywa (wypowiedź Gödla w: Wang, 1996, s. 211–212).

Opinia ta jest znamienna w kontekście I i II twierdzenia Gödla, zgodnie z którymi arytmetyka Peany (PA) nie jest zupełna i nie da się w niej udowodnić jej własnej niesprzeczności. Samo skonstruowane przez Gödla zdanie wyraża – mówiąc swobodnie – swoją własną niedowodliwość. Postrzegamy je jako prawdziwe, ale oczywiście wynika to już z analiz o charakterze semantycznym, wykraczających poza samą

---

[9] Stosunkowo naturalne wydaje się uznanie, iż prawdy teorii liczb mają „twardy" charakter, że nie są bynajmniej kwestią li tylko konwencji. Teza, że istnieje $n!$ permutacji zbioru n-elementowego wydaje się mieć charakter obiektywny – a nie być wynikiem jedynie czysto konwencjonalnej gry założeń.

formalną arytmetykę PA. Argumentacja taka jest – zdaniem Gödla – w pełni uprawniona (mimo iż nie jest ona formalizowana w PA). Źródłem wiedzy matematycznej jest bowiem analiza pojęć. Opiera się ona na swoistej zdolności poznawczej naszego umysłu, tj. intuicji matematycznej. To prowadzi nas do coraz silniejszych teorii, którym mamy prawo nadawać realistyczną interpretację.

2. Problem wyjaśniania w matematyce

Problem wyjaśnienia matematycznego można stawiać w (przynajmniej) dwóch obszarach: (i) wyjaśnień matematycznych w naukach przyrodniczych; (ii) wyjaśnień wewnątrz matematyki. Tu skupiam się wyłącznie na zagadnieniu (ii). Najbardziej chyba naturalną odsłoną tego zagadnienia jest pytanie o wyjaśniający charakter dowodów matematycznych: czy dowód matematyczny może (powinien?) pełnić rolę wyjaśniającą – i co to znaczy? Jest jasne, że podstawową funkcją dowodu jest niejako udokumentowanie (zgodnie ze standardami matematycznej argumentacji) prawdziwości jakiejś tezy. Zarazem naturalnym dla matematyka pytaniem (choć już nie ściśle formalnym) jest pytanie o głębsze przyczyny, o całe „tło zjawisk". Mówiąc swobodnie, przy analizie dowodu ważne jest nie tylko to, jak poszczególne kroki dowodowe następują po sobie, ale „o co tu naprawdę chodzi?". Używając nieco metaforycznego języka, chodzi tutaj o ową subtelną „grę pojęć matematycznych", która nie sprowadza się jedynie do tego, że kolejny krok dowodu wynika z poprzedniego. Rozumienie dowodu matematycznego jako formalnej weryfikacji faktów (przez badanie zależności formalnych) nie oddaje w pełni rozumienia dowodu matematycznego jako źródła wiedzy matematycznej. W takim duchu wypowiadają się nieraz matematycy:

> Nawet kiedy podano dowód, to – mimo iż może być ściśle logiczny i przekonujący […] może pozostać uczucie braku satysfakcji. Czytelnik może mieć poczucie, że czegoś brakuje. Argument może zostać przedstawiony w taki sposób, że nie rzuca światła na to, dlaczego, skąd bierze się procedura, jakie jest źródło dowodu i dlaczego prowadzi do sukcesu (Mordell, 1959, s. 11; cytowanie na podstawie: Mancosu, 2008, s. 142).

Podobnie Rota pisze (w kontekście dowodów komputerowych), iż „weryfikacja stanowi dowód, ale weryfikacja nie musi podawać racji" (Rota, 1997, s. 186–187)[10].

Pytanie o wyjaśniającą rolę dowodów matematycznych ma długą historię – już u Arystotelesa można znaleźć rozróżnienie odpowiadające, w dzisiejszej terminologii, na rozumowania, które jedynie uzasadniają pewną tezę, i rozumowania, które wyjaśniają przyczyny[11]. Sami matematycy mają oczywiście świadomość różnej natury i funkcji dowodów. Mancosu (2018) przytacza przykład monografii z zakresu geometrii algebraicznej, w której mowa jest o różnych metodach dowodzenia, i w której autor odrzuca tzw. metodę transferu (mimo jej efektywności), wskazując na fakt, że pozwala ona wprawdzie na logiczne udowodnienie określonego wyniku, ale go nie wyjaśnia[12]. Dyskusja na temat wyjaśnień w matematyce jest żywa – istnieje wiele szczegółowych analiz dotyczących poszczególnych twierdzeń, wskazuje się na związki problemu wyjaśniania z (dość nieuchwytnym, ale ważnym) pojęciem głębi w matematyce[13], kwestiami estetycznymi, czy problemem czystości dowodów (tj. stosowaniem metod ograniczonych do danej dziedziny – np. metod czysto geometrycznych w dowodach twierdzeń z geometrii czy kombinatorycznych w dowodach z zakresu kombinatoryki). Wciąż jednak brak dobrej, ogólnej odpowiedzi na pytanie o to, co nadaje dowodom matematycznym moc wyjaśniającą.

Pytanie o wyjaśnienie może też mieć szerszy charakter – i może dotyczyć nie tylko samych dowodów, ale wręcz szerszych klas zagadnień. Pytanie „co sprawia, że nie da się przeprowadzić kwadratury koła?" ma nieco szerszy wymiar: odpowiedź znajdziemy poza geometrią, w teorii Galois. Nie jest to więc już kwestia samego dowodu, ale też odpowiedniego interpretowania jednej teorii w drugiej. Podobnie można zadawać pytania o naturę podstawowych dla danej teorii pojęć, o naj-

---

[10] Nie ma tu miejsca na szczegółowe analizy zagadnienia. Za bardzo ciekawy uważam artykuł Rava (1999), w którym autor analizuje rolę dowodów w matematyce, akcentując ich centralne miejsce.

[11] Por. np. Mancosu (2018), gdzie Czytelnik znajdzie szczegółowy opis problemu wyjaśnień matematycznych (zarówno w fizyce, jak i wewnątrz samej matematyki) wraz z obszerną i aktualną bibliografią. Dziękuję jednemu z Recenzentów za zwrócenie uwagi na aktualną wersję tego hasła.

[12] Ta monografia to Brumfiel (1979). W innej pracy (Hafner, Mancosu, 2008) autorzy analizują ten przykład w kontekście teorii wyjaśnienia Kitchera.

[13] Por. numer specjalny *23*(2) *Philosophia Mathematica* (2015).

bardziej naturalne sformułowania etc. Jest to zagadnienie bardzo obszerne i nie będzie tu podjęte.

Jednak ten problem wyjaśnienia (czy może: szereg problemów) dotyczy wyjaśnień w e w n ą t r z matematyki. Natomiast przedmiotem analiz w niniejszym artykule jest pytanie, które nie ma charakteru *par excellence* matematycznego – raczej filozoficzny lub metodologiczny. Ogólne pytanie o to, dlaczego każdy problem matematyczny jest rozwiązywalny, ma zupełnie inny charakter niż bardzo konkretne pytanie na przykład o to, dlaczego każda funkcja różniczkowalna jest ciągła, czy też dlaczego nie jest możliwa kwadratura koła lub trysekcja kąta. W tych bowiem przypadkach pytamy przede wszystkim o dowód, ewentualnie o jego analizę i komentarz (wyjaśnienie): z jakich „zasobów" korzystamy, jakie założenia są niezbędne (i jak ingerują w dowód), do jakiego zestawu pojęć się odwołujemy, jakie jest „pojęciowe środowisko". Ostatecznie więc często odpowiedź można sprowadzić do analizy pewnego konkretnego dowodu. Trudno natomiast oczekiwać podobnej analizy tezy o charakterze filozoficznym – zwłaszcza w kontekście faktu, że I twierdzenie Gödla zdaje się na pierwszy rzut oka owej tezie zaprzeczać.

Jednak w kontekście filozofii matematyki Gödla odwołanie się do pojęcia wyjaśnienia w tym kontekście uważam za uprawnione. Pojęcie rozwiązania problemu matematycznego wykracza w ujęciu Gödla poza podanie dowodu formalnego. Należy pamiętać o tym, że Gödel dostrzegał naturalne związki między zagadnieniami technicznymi i filozoficznymi[14]. Warto przypomnieć fakt, iż Gödel wierzył w to, że rozważaniom filozoficznym można będzie nadać klarowną postać i że (po wystarczająco dobrym wyjaśnieniu pojęć) dyskusja filozoficzna uzyska poziom ścisłości charakterystyczny dla matematyki (Gödel, 1951, s. 322). W takim optymistycznym duchu można interpretować jego stwierdzenie, że projekt stworzenia *characteristica universalis* Leibniza nie był czystą utopią (Gödel, 1944, s. 101). Zarazem przyznawał, że jest to kwestia przyszłości i że na razie filozofia nie osiągnęła wystarczającego stopnia rozwoju (Gödel, 1951, s. 311). Sam przyznawał, że nie nadał swoim analizom wystarczająco precyzyjnej postaci.

[14] Twórca teorii mnogości, Cantor, twierdził, iż nie da się oddzielić zagadnień matematycznych od filozoficznych – zaś teorii mnogości nadawał interpretację teologiczną (np. Murawski, 1984; Purkert, 1989).

O wyjaśnieniu mówimy w naturalny sposób w sytuacji, kiedy mamy do czynienia z pewnym zjawiskiem, które chcemy opisać, zrozumieć, czy właśnie wyjaśnić. Zazwyczaj (a na pewno często) zjawisko to jest niejako czymś zewnętrznym, nie jest np. kwestią konwencji – przykładem są zjawiska fizyczne, które są nam niejako dane, jesteśmy z nimi skonfrontowani. Czy jednak podobne ujęcie będzie właściwe w odniesieniu do matematyki, będącej – jak się wydaje – naszym tworem? W kontekście realistycznego stanowiska Gödla takie ujęcie jest jednak naturalne: matematyka jest niejako niezależna od nas, ma obiektywny charakter. Nie ma więc nic dziwnego w tym, iż jesteśmy konfrontowani z obiektywnymi faktami – także dotyczącymi matematyki. Fakty te chcemy wyjaśnić. A przykładem takiego faktu jest właśnie rozwiązywalność problemów.

Udzielenie odpowiedzi na pytanie: „Dlaczego każdy dobrze postawiony problem matematyczny jest rozwiązywalny?" wiąże się oczywiście z koniecznością doprecyzowania tego, jak rozumieć należy pojęcie rozwiązalności (rozwiązania) problemu matematycznego.

Zagadnienie to można niejako „unieważnić", sprowadzając je to definicyjnej tautologii: problem jest dobrze postawiony dokładnie wtedy, gdy jest rozwiązywalny (nawet jeśli owego rozwiązania nie znamy, ani nawet – potencjalnie – nigdy nie poznamy). I tu kończy się dyskusja. Uważam jednak, że nie byłoby to rzetelne postawienie sprawy. Pojęcia „dobrze postawionego problemu" i „rozwiązania problemu" nie są do siebie w prosty sposób redukowalne – historia matematyki pokazuje dobitnie, że byłoby to uproszczenie.

Pojęcie rozwiązania problemu matematycznego z punktu widzenia zwykłej, codziennej matematyki ma oczywiste znaczenie: „rozwiązać problem" to po prostu podać odpowiedni dowód, z użyciem standardowych środków. Zapewne 99,9% rozwiązań problemów, z jakimi styka się matematyk w praktyce, właśnie na tym polega. Sytuacja jednak komplikuje się, kiedy dotrzemy do zagadnień, które są nierozstrzygalne w ramach standardowej matematyki. Tu pojawia się pytanie, czym jest standardowa matematyka. Dość powszechny w filozofii i podstawach matematyki jest pogląd, zgodnie z którym standardowa matematyka daje się zrekonstruować w teorii mnogości ZFC (tj. Zermeli-Fraenkla z aksjomatem wyboru) – i to właśnie ZFC wyznacza niejako ramy „matematycznego standardu". Ten punkt widzenia jest bardzo wyraźnie widoczny u samego Gödla.

Wiadomo już od momentu udowodnienia I twierdzenia Gödla, że ZFC jest teorią niezupełną, zaś pierwszym przykładem zdania niezależnego o klarownej matematycznej treści jest hipoteza kontinuum[15]. Oczywiste jest więc, że pojęcie rozwiązania problemu matematycznego musi mieć inny sens, niż „rozstrzygnięcie go w ZFC" – w przeciwnym razie teza Gödla byłaby w oczywisty i jaskrawy sposób fałszywa.

Stanowisko Gödla warto rozpatrywać w kontekście programu Hilberta i matematycznego światopoglądu Hilberta. Hilbert był niewątpliwie optymistą poznawczym – twierdził bowiem, że w matematyce nie ma *ignorabimus* i że każdy dobrze postawiony problem matematyczny może zostać rozwiązany[16]. Program Hilberta można też uznać za wyraz owego optymizmu: Hilbert miał nadzieję, iż uda się znaleźć bezpieczne podstawy dla matematyki – która zarazem będzie na tyle silna, aby móc rozwiązywać dobrze postawione problemy. Narzędzi do tego ma dostarczyć teoria dowodu. Hilbert był zatem przekonany, że każdy problem matematyczny można rozwiązać w dosłownym sensie (najbliższym chyba potocznemu rozumieniu)[17].

---

[15] Twierdzenia Gödla informują o istnieniu zdań niezależnych, jednak konstrukcja tego zdania nie prowadzi do zdań o naturalnej treści matematycznej. CH jest takim zdaniem niezależnym od ZFC – i jest to bardzo ważny wynik. Warto dodać, że pierwsze zdania niezależne od PA o jasnej treści kombinatorycznej podano dopiero w latach 70. (Paris, Harrington, 1977).

[16] Francuski fizjolog, Emil du Bois-Reymond w 1872 sformułował tezę *ingorabimus*, zgodnie z którą nauka obarczona jest wewnętrznymi ograniczeniami, a więc istnieć muszą problemy niemożliwe do rozwiązania. Jego bratem był Paul du Bois-Reymond (wybitny matematyk), który tezę tę uważał za uzasadnioną także w stosunku do matematyki (McCarty, 2004). Nasuwa się tu uwaga Kanta o dręczących ludzki umysł pytaniach „których nie może uchylić, albowiem zadaje mu je własna jego natura, ale na które nie może odpowiedzieć, albowiem przewyższają one wszelką jego możność" (Kant, 1957, s. 7).

[17] Nieco upraszczając, można powiedzieć, że aż do przełomu XIX i XX wieku nie istniało pojęcie dowodu formalnego, a dowody matematyczne miały charakter – mówiąc swobodnie – semantyczny. Dopiero wraz z rozwojem logiki formalnej możliwe było w ogóle sformułowanie pojęcia „dowodu formalnego" jako swoistego zestawu operacji o formalnym charakterze (choć przekonania tego typu – w jeszcze niedoprecyzowanej formie – były już wcześniej obecne w matematyce). Niejako paradygmatycznym przykładem, który bardzo wyraźnie pokazuje rozbieżność między tradycyjnym (semantycznym) a formalnym pojęciem dowodu, jest geometria, której formalizację podał Hilbert w *Grundlagen der Geometrie*. Formalistyczny punkt widzenia na dowody geometryczne oczywiście zakłada, że istnieje jakiś ustalony system formalny, w ramach którego dowody te są rekonstruowane i że ów system obejmuje całość prawd (czy „prawd"). Nie ma miejsca na rozumowania

Często spotykanym stwierdzeniem w literaturze jest to, że twierdzenia Gödla zadały programowi Hilberta śmiertelny cios. Jest to stwierdzenie sugestywne, ale zapewne sam Gödel by się z nim nie zgodził, w każdym razie nie do końca. Już w niepublikowanych za życia notatkach zauważa, że interpretowanie matematyki finitystycznej jako systemu czysto formalnego prowadzi do pewnego dylematu (Gödel, 193?, s. 164). Możemy bowiem uznać:

(i) że n i e k a ż d y problem matematyczny jest rozwiązalny;
(ii) że syntaktyczne ujęcie dowodu nie stanowi właściwej reprezentacji naszego pojęcia dowodu jako czegoś, co jest źródłem naszej pewności i umożliwia rozwiązywanie problemów matematycznych.

Gödel wskazuje na fakt, że „zdania teorii liczb nierozstrzygalne w danym formalizmie są zawsze rozstrzygalne przez oczywiste wnioskowania niewyrażalne w danym formalizmie. Jeśli chodzi o te nowe wnioskowania, to okazują się one być równie oczywiste jak te, które dane są wewnątrz formalizmu. Nie jest więc raczej możliwe sformalizowanie rozumowań matematycznych nawet w dziedzinie teorii liczb, jednak przekonanie, o którym mówi Hilbert, pozostaje nienaruszone" (Gödel, 193?, s. 164), opowiadając się tym samym za drugą możliwością. Można powiedzieć, że jego zdaniem, interpretacja syntaktyczna prowadzi do zagubienia ważnych aspektów dowodu.

I właśnie dostrzeżenie tego faktu pozwala Godlowi pozostać poznawczym optymistą w odniesieniu do matematyki. Jednak w radykalnie inny sposób (niż Hilbert) interpretował pojęcie „rozwiązania problemu matematycznego". Zdaniem Gödla przekonujące rozumowanie matematyczne może mieć charakter nieformalny[18]. Przykładem jest zdanie skonstruowane w dowodzie I twierdzenia Gödla: nie ma bowiem wątpliwości, że zdanie „Ja jestem niedowodliwe w ramach PA"

---

intuicyjne – bardzo radykalnie przeciwko koncepcji intuicji wypowiadał się np. Hahn.

[18] Warto wspomnieć, że zdaniem Gödla możliwe będzie prowadzenie dyskusji filozoficznej z matematyczną ścisłością (warunkiem jest dobre wyjaśnienie pojęć; Gödel, 1951, s. 322). Wang przytacza opinię Gödla, zgodnie z którą w przyszłości sformułowana zostanie precyzyjna doktryna metafizyczna. Jej brak wynika z błędnego sposobu uprawiania filozofii (a także teologii) jak i panujących, scjentystycznych przesądów (Wang, 1987, s. 159).

postrzegamy jako prawdziwe, choć oczywiście nie jest ono dowodliwe w arytmetyce PA.

A zatem pojęcie „rozstrzygnięcia problemu matematycznego" będzie u Gödla interpretowane w zdecydowanie inny sposób, niż u Hilberta. Można powiedzieć, że w inny sposób interpretują oni termin „wiedza matematyczna" czy też, że w inny sposób odpowiadają na pytanie „co to znaczy – mieć wiedzę matematyczną?". Z punktu widzenia programu Hilberta uzyskanie wiedzy matematycznej jest możliwe dzięki ustanowieniu niebudzącego wątpliwości, finitystycznego fragmentu matematyki (a następnie dzięki przeprowadzeniu stosownych teoriodowodowych redukcji). Dla Gödla sprawa wygląda zupełnie inaczej – co ma oczywiście związek z twierdzeniami o niezupełności. Żadna teoria formalna (spełniająca odpowiednie, naturalne warunki) nie jest teorią zupełną, a więc nie będzie możliwe rozstrzygnięcie wszystkich problemów matematycznych w jednej teorii). Proces uzyskiwania wiedzy matematycznej wykracza poza procedury formalne, zaś matematyczna argumentacja nie sprowadza się do pojęcia „dowodu w teorii T". Dowody, które znamy z praktyki matematycznej, nie mają oczywiście charakteru formalnego: są to raczej przekonujące argumenty, w których w nieuchronny sposób pojawia się element o charakterze intuicyjnym, związanym z naszym rozumieniem pojęć matematycznych, a nie tylko formalnymi przekształceniami. Spektakularnym przykładem jest dowód twierdzenia Fermata – trudno sobie wyobrazić, jak wyglądałby w wersji w pełni sformalizowanej, jednak z pewnością nie byłby dla nas czytelny[19].

Pojęciem centralnym w filozofii matematyki Gödla jest intuicja matematyczna – swoista zdolność intelektualna do ujmowania prawd matematycznych, która wykracza poza mechaniczne operowanie na symbolach. Warto w tym kontekście wspomnieć o ważnej pracy Turinga (1939). Turing zwraca uwagę na fakt (w kontekście wyników Gödla), iż jesteśmy w stanie dostrzec prawdziwość zdań niedowodliwych w da-

---

[19] Ciekawy przykład dowodu, który jest krótki, zrozumiały i w pełni akceptowalny podaje Boolos (1987). Jest to dowód w logice drugiego rzędu – jednak formalizacja tego dowodu w logice pierwszego rzędu miałaby długość „kosmiczną". Problem formalizacji tego dowodu w Mizarze jest przedmiotem analiz w pracy Benzmüllera i Browna (2007). Dziękuję jednemu z Recenzentów za zwrócenie uwagi na to zagadnienie oraz sugestie bibliograficzne – a także za sugestie dotyczące prac Turinga.

nym formalizmie. W pracy analizuje problem całego systemu coraz silniejszych logik, w których możliwe będzie rozstrzyganie coraz szerszych klas problemów matematycznych – co również można rozumieć jako techniczny odpowiednik idei Gödla wykraczania poza dany system formalny[20]. Jakkolwiek byśmy nie rozumieli pojęcia intuicji matematycznej, nie budzi wątpliwości fakt, że nie może mieć ona charakteru mechanicznego – i tym samym nie może być „imitowana" w standardowym modelu maszyny Turinga. Można jednak twierdzić (np. Hodges, 2013), że pojęcie wyroczni, wprowadzone przez Turinga, stanowi formalny odpowiednik czynności poznawczych, wykraczających poza procedury mechaniczne. Turing nie analizuje bliżej natury owej wyroczni, ograniczając się do stwierdzenia, iż nie może być ona maszyną. Można więc powiedzieć, iż nieformalna, intuicyjna składowa działalności matematyka została tu „wbudowana" w techniczną definicję.

Pojawia się tu napięcie pomiędzy tym, co nazwalibyśmy „przekonującym matematycznie argumentem" a jego formalną parafrazą (czy może: *explicatum* w postaci pojęcia dowodu formalnego). Stanowisko szeroko rozumianego formalizmu redukuje pojęcie matematycznie poprawnego argumentu do pojęcia dowodu formalnego w stosownej teorii T. Jednak stanowisko Gödla jest zupełnie inne – z jego punktu widzenia dobrze postawione problemy matematyczne to nie są problemy, które są rozstrzygalne w ramach jakiejś konkretnej teorii T. Raczej – swobodnie mówiąc – dla każdego dobrze postawionego problemu matematycznego można sformułować stosowną teorię T, która go rozstrzygnie. I nie chodzi oczywiście o trywialne stwierdzenie, że jeśli mamy zdanie φ niezależne od teorii T, to teoria $T + \varphi$ (czyli T z dodanym φ jako założeniem), ów problem rozstrzygnie. Chodzi oczywiście o to, że możliwe jest poszukiwanie naturalnych, matematycznie uzasadnionych teorii T^*, stanowiących rozszerzenia T – i rozstrzygających nasze zdania (dotychczas) nierozstrzygalne.

Warto wspomnieć o dyskusji między Gödlem a Zermelo dotyczącej m.in. zagadnienia rozstrzygalności problemów matematycznych[21]. W liście do Gödla z dnia 21.09.1931 Zermelo przeciwstawia się tezie,

[20] W eseju Marciszewskiego (2018, w tym numerze) zagadnienie to jest omówione bardziej wyczerpująco.

[21] Dziękuję jednemu z Recenzentów za zwrócenie uwagi na to zagadnienie, a także za wskazanie pracy Ebbinghaus, Fraser, Kanamori (2010), w której (na stronach 482–501) zamieszczona jest przytaczana tu korespondencja.

iż każde pojęcie matematyczne może zostać zdefiniowane za pomocą skończonego ciągu symboli – nazywa to przekonanie „finitystycznym uprzedzeniem". Twierdzi wręcz, iż wyniki Gödla wyrażają fakt oczywisty: skoro można w języku formalnym zdefiniować jedynie przeliczalnie wiele zdań, zaś prawd jest nieprzeliczalnie wiele, to w oczywisty sposób muszą istnieć prawdy niedowodliwe. Można twierdzić, że Zermelo nie docenił znaczenia wyników Gödla i nie w pełni zrozumiał techniczne subtelności. Gödel odpowiada na list Zermelo (list z dnia 12.10.1931), wyjaśniając, na czym polega istota jego dowodu – i w szczególności podkreślając, iż chodzi o zdania wyrażalne w danym systemie, nierozstrzygalne w tym systemie, a zarazem rozstrzygalne w systemie silniejszym. Zermelo interpretuje zastosowanie silniejszego systemu jako modyfikację samego pojęcia dowodu. Twierdzi, że dowodzenie polega na uczynieniu oczywistą stosownej tezy, co się odbywa poprzez sformułowanie odpowiedniego zestawu zdań. Zermelo stawia pytanie o to, czym jest owa oczywistość – i zarazem formułuje hipotezę, że w odpowiednim systemie każdy problem matematyczny jest rozstrzygalny (list do Gödla z dnia 29.10.1931). Korespondencja nie miała dalszego ciągu, jednak jest ciekawym świadectwem wczesnej recepcji wyników Gödla. Ciekawe jest również inne spojrzenie na kwestię rozstrzygalności problemów: Gödel, wiedząc o istnieniu metamatematycznych ograniczeń, wierzy w to, że możliwe będzie ustanawianie nowych aksjomatów, pozwalających na rozstrzyganie kolejnych problemów. Natomiast zdaniem Zermelo owe ograniczenia są oczywistym defektem systemów finitystycznych, zaś rozumowania matematyczne winny być odtwarzane w systemach o charakterze infinitarnym. Zgodnie z jego znanym stwierdzeniem, iż matematyka to logika nieskończonego[22].

3. Przykład hipotezy kontinuum

Gödel odróżniał matematykę obiektywną (jako zbiór prawd o matematycznym uniwersum) od subiektywnej (czyli tej, która jest nam znana). Jego realistyczne stanowisko zakładało, iż zadaniem matematyka jest poszukiwanie opisu rzeczywistości matematycznej – obiektywnej, istniejącej niezależnie od nas. Systemy formalne opisują ją tylko

[22] Bardzo ciekawy opis programu logiki infinitarnej Zermela Czytelnik znajdzie w pracy Pogonowskiego (2006).

częściowo – i oczywiście nie możemy poprzestać na jednym, ustalonym systemie jako finalnym zbiorze prawd. Raczej należy „drążyć" pojęcia matematyczne (w szczególności – pojęcie zbioru) tak, aby móc uzasadnić nowe aksjomaty – które pozwolą na rozstrzyganie kolejnych otwartych problemów. O ile jednak w wypadku samej arytmetyki faktycznie rozumowanie nieformalne przekonuje nas o prawdziwości np. zdania Gödla „ja nie mam dowodu", zaś praktyka matematyczna i nasze przekonania o sensowności arytmetyki prowadzą do zaakceptowania zdania Con(PA) – to trudno byłoby tego typu naturalną i oczywistą intuicyjną argumentację podać w wypadku zdań niezależnych od teorii mnogości.

Poszukiwanie wyjaśnienia rozwiązywalności każdego dobrze postawionego problemu matematycznego dobrze jest odnieść do konkretnego przykładu – i tę funkcję w niniejszym artykule będzie pełnić hipoteza kontinuum (CH), która jest niejako paradygmatycznym przykładem zdania niezależnego od ZFC[23]. ZFC nakłada niewiele ograniczeń: niesprzeczne z ZFC jest bardzo wiele zdań typu „Wartość kontinuum to $\aleph_\alpha$"[24]. Jednak mimo formalnej niezależności można postawić pytanie, czy istnieją jakieś przekonujące argumenty, które pozwoliłyby przypisać kontinuum jakąś konkretną wartość – i przede wszystkim, czy problem kontinuum jest dobrze postawionym problemem matematycznym.

W jednym ze swoich najbardziej znanych artykułów Gödel analizuje właśnie hipotezę kontinuum (Gödel, 1964). Uważa ją za obiektywne, dobrze postawione pytanie dotyczące matematycznej rzeczywi-

---

[23] Hipoteza kontinuum głosi, że moc zbioru liczb rzeczywistych (czyli moc kontinuum) jest najmniejszą nieprzeliczalną liczbą kardynalną, czyli $\aleph_1$. W innym sformułowaniu: każdy nieskończony podzbiór R jest przeliczalny lub równoliczny z R. Niezależność CH od ZFC została udowodniona przez Gödla i Cohena: Gödel wykazał jej niesprzeczność z aksjomatami ZFC, zaś Cohen w 1963 roku niesprzeczność jej negacji.

[24] Znane jest twierdzenie, które pokazuje, jak bardzo „dziwnie" może zachowywać się potęgowanie liczb kardynalnych. Easton wykazał, że dla dowolnej funkcji F, spełniającej dwa warunki: (1) F jest niemalejącą funkcją z klasy regularnych liczb kardynalnych w liczby kardynalne; (2) dla dowolnego κ: $\kappa < \mathrm{cf}\,(F(\kappa))$; można skonstruować model dla teorii mnogości, w którym dla dowolnej regularnej liczby kardynalnej κ zachodzi $2^\kappa = F(\kappa)$ (Easton, 1970). W szczególności kontinuum (czyli 2^ω) może być duże.

stości[25]. Jest ona oczywiście nierozstrzygalna w ZFC, ale to wynika po prostu ze słabości owej teorii. Czym innym jest bowiem matematyka obiektywna – ogół zdań prawdziwych bezwarunkowo – a czym innym subiektywna: ogół zdań dowodliwych w danej teorii formalnej (Gödel, 1951, s. 305). Sam skłaniał się raczej do tezy o fałszywości CH, wskazując paradoksalność pewnych konsekwencji CH (Gödel, 1964). Nie jest to jednak pogląd powszechnie akceptowany.

Gödel był więc przekonany o tym, że możliwe będzie znalezienie aksjomatów pozwalających na ustalenie wartości kontinuum. Jak wiadomo, aksjomat konstruowalności V = L implikuje CH (a także znacznie silniejszą od niej, uogólnioną hipotezę kontinuum). V = L ma poniekąd charakter minimalistyczny (uniwersum zbiorów jest „chude"). Gödel przypuszczał więc, że możliwe będzie wyprowadzenie CH z jakiegoś aksjomatu o charakterze przeciwnym do V = L, niejako maksymalistycznym (Gödel, 1964, s. 266). W pewnym dość dobrze określonym sensie, za aksjomaty o charakterze maksymalistycznym można uznać aksjomaty dużych liczb kardynalnych – i tu Gödel upatrywał rozwiązania. Zdawał sobie sprawę z tego, że potrzebne będą silne aksjomaty tego typu, i że nie będą tu wystarczające znajdujące się stosunkowo nisko w hierarchii nieskończoności liczby Mahlo[26].

Okazało się, że ta droga nie przyniesie sukcesu w zakresie CH: znane są wyniki, zgodnie z którymi różne silne aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych są niesprzeczne zarówno z hipotezą kontinuum, jak i z jej negacją (Levy, Solovay, 1967). Dodajmy tutaj, że Gödel sam próbował sformułować innego typu aksjomaty, które pozwoliłyby na rozwiązanie tego problemu (Gödel, 1970a, 1970b)[27].

---

[25] Argumenty na rzecz tezy, iż hipoteza kontinuum stanowi dobrze postawiony problem matematyczny, a nie tylko metamatematyczny, formułuje np. Hauser (2002).

[26] Artykuł Gödla (1964) nie jest jedynym (ani pierwszym) miejscem, gdzie wyrażał tego typu opinie. W wykładzie w Princeton w 1946 Gödel scharakteryzował „silne aksjomaty nieskończoności" jako założenie, które oprócz tego, że ma określoną strukturę formalną, to „w dodatku jest prawdziwe" (Gödel, 1946, s. 151). Wyraził też bardzo optymistyczne przypuszczenie, iż „może obowiązywać pewna forma twierdzenia o zupełności, która mówi, że każde zdanie wyrażalne w teorii mnogości jest rozstrzygalne na bazie dotychczasowych aksjomatów z dodatkowym założeniem dotyczącym wielkości uniwersum wszystkich zbiorów" (Gödel, 1946, s. 151).

[27] Zdaniem komentatorów w rozumowaniach Gödla tkwił błąd (por. Ellentuck, 1975; Solovay, 1995).

Niezależnie jednak od tego, że akurat badania w zakresie dużych liczb kardynalnych nie przyniosły rozstrzygnięcia problemu kontinuum, to sama idea poszukiwania nowych aksjomatów stała się inspiracją dla badaczy, często mówi się w tym kontekście o programie Gödla. Oczywiście – aksjomaty takie nie mogłyby mieć charakteru *ad hoc*, ale miałyby wynikać z analiz dotyczących naszego rozumienia pojęcia zbioru i naszej wizji uniwersum matematycznego. Dyskusja na ten temat jest żywa – jednak jej choćby pobieżne zreferowanie zdecydowanie wykracza poza ramy tego artykułu[28].

Jeśli więc chodzi o zdefiniowane wyżej *explicatum* („rozwiązywalność problemu matematycznego") to można pokusić się o charakterystykę jako znalezienie odpowiedniej teorii formalnej T – będącej rozszerzeniem ZFC – opartej na naturalnych, akceptowalnych aksjomatach, prowadzących do już formalnego rozstrzygnięcia problemu P w ramach T. Byłyby tu więc niejako dwie składowe:

- Faza koncepcyjno-analityczna: poszukiwanie odpowiednich naturalnych, akceptowalnych aksjomatów – i sformułowanie odpowiedniej teorii T.
- Faza techniczna: rozstrzygnięcie P w ramach T (czyli niejako standardowa praca matematyczna – być może bardzo trudna)[29].

Jakie jest filozoficzne tło dla przekonania, iż jest to zawsze możliwe i że każdy dobrze określony problem jest rozwiązywalny? Można tu wskazać dwa ważne aspekty. Jeden określiłbym hasłowo jako metafizyczny, drugi zaś jako metodologiczny. Mówiąc o aspekcie metafizycznym mam na myśli fakt, że realistyczne stanowisko Gödla zakłada istnienie obiektywnego, posiadającego pewną ustaloną naturę uniwersum matematycznego. Gödel uważał, iż uniwersum to ma charakter mnogościowy – i jest to jedno, obiektywne uniwersum, w którym in-

[28] Wymieńmy np.: Feferman, (1996, 2000), Friedman (2000), Maddy (1988a, 1988b, 1993, 1997), Steel (2000). Prace Woodina (1999, 2001) zawierają bardzo złożone technicznie analizy o charakterze metodologicznym, w oparciu o które można udowodnić, iż wartością continuum jest $\aleph_2$. Oczywiście są one przedmiotem dyskusji i kontrowersji, nie można więc bynajmniej twierdzić, iż oto problem kontinuum został rozwiązany.

[29] W odniesieniu do hipotezy kontinuum twierdził: „Kiedy pojęcie zbioru stanie się jasne, nawet gdy znajdziemy zadowalające aksjomaty nieskończoności, nadal pozostanie techniczny (tj. matematyczny) problem rozstrzygnięcia hipotezy kontinuum na podstawie aksjomatów" (Wang, 1996, s. 237).

terpretowane są wszystkie zdania matematyczne – i każde zdanie jest w nim prawdziwe bądź fałszywe. Nie ma zatem zdań o niezdeterminowanym statusie logicznym, zdań „chwiejnych"[30]. Teza Gödla miałaby zatem podbudowę metafizyczną w określonej wizji uniwersum matematycznego[31].

Oczywiście wiara w istnienie jednego, ustalonego (choć nieznanego) uniwersum matematycznego nie daje automatycznie żadnych wskazówek dotyczących tego, jakie są rozwiązania otwartych problemów matematycznych. Można byłoby przecież przyjąć tezę, iż świat matematyczny ma wprawdzie charakter obiektywny i ustalony, ale że jest niepoznawalny (czyli byłaby to teza *ignorabimus*, wbrew optymizmowi Hilberta czy Gödla). I tu dotykamy aspektu metodologicznego: tego, w jaki sposób możemy poszukiwać odpowiedzi na pytania matematyczne, które są *ex definitione* nierozstrzygalne w ramach dostępnej, tj. przyjętej, standardowej teorii (np. ZFC). Jest to możliwe przez ustanowienie nowych, wiarygodnych aksjomatów. Gödel był przekonany, że nasza analiza pojęcia zbioru pozwoli na ustanowienie takich aksjomatów. Jest to wyraz określonej wizji epistemologicznej: zdaniem Gödla mamy zdolność do analizy pojęć i dostrzegania owych prawd. Za obiecującą metodę uważał metodę fenomenologiczną, pisał o tym jawnie w jednej z prac (Gödel, 1961; por. również np. Tieszen, 1998)[32].

---

[30] Tak można byłoby uważać, gdyby przyjmować np. koncepcję tzw. multiwersów – tzn. koncepcję realistyczną, zgodnie z którą istnieje rzeczywistość matematyczna, ale nie jest to „jednolite" uniwersum matematyczne, ale raczej cała „galaktyka" uniwersów teoriomnogościowych, realizujących różne koncepcje zbioru (np. Hamkins, 2012). W takiej sytuacji nie miałoby sensu twierdzenie, że np. hipoteza kontinuum ma ustaloną wartość logiczną: w różnych uniwersach kontinuum mogłoby przyjmować różne wartości.

[31] Niniejszy artykuł nie ma charakteru historyczno-egzegetycznego, warto jednak zaznaczyć, że wydaje się, iż w rozważanej kwestii u Gödla nastąpiła pewna ewolucja poglądów. Pisze, że „jest wiarygodne, że [V = L] jest zdaniem absolutnie nierozstrzygalnym, na którym teoria mnogości rozgałęzia się (bifurcates) na dwa różne systemy, podobnie jak geometria euklidesowa i nieeuklidesowa" (Gödel, 1939b, s. 155). Dopuszcza więc jawnie istnienie problemów absolutnie nierozstrzygalnych; podobne tezy znajdziemy w innym tekście (Gödel, 193?). Niewątpliwie, później twierdził, iż V = L należy odrzucić.

[32] Warto tu wspomnieć o „drugim filarze" poznania prawd matematycznych – mogą być to argumenty o charakterze metodologicznym, które można symbolicznie oznaczyć etykietą „owocność". Jest to bardzo obszerne zagadnienie, którego nie będę tu analizował. Warto pamiętać, iż sam Gödel bardzo wyraźnie podkreślał znaczenie tego aspektu, o czym świadczy chociażby następujący cytat:„[M]ożliwe

4. Podsumowanie

Pojęcie rozwiązania problemu matematycznego Gödel rozumie znacznie szerzej niż jako podanie matematycznego dowodu. Sformułowanie takiego dowodu jest oczywiście warunkiem koniecznym (i w wypadku ogromnej większości standardowych problemów matematycznych – wystarczającym), ale są też problemy matematyczne, dla których sformułowanie dowodu jest dopiero drugim etapem. Pierwszym jest znalezienie wiarygodnych (prawdziwych!) założeń, na podstawie których ów dowód można przeprowadzić. Założenia te oczywiście wykraczać muszą poza standard, jakim jest ZFC.

Jakie jest jednak wyjaśnienie owego fenomenu rozwiązalności problemów? Pierwsze założenie, na jakim opiera się tu Gödel, to metafizyczny realizm: istnieje uniwersum matematyczne, ma ono charakter obiektywny, niezależny od nas – i każde zdanie matematyczne ma ustaloną wartość logiczną. Drugie założenie, to pewnego rodzaju optymizm epistemologiczny: jesteśmy wyposażeni w wystarczająco dobre środki poznawcze, aby uzyskać wgląd w owo uniwersum.

Zastosowanie pojęcia wyjaśnienia, charakterystycznego przecież dla nauk empirycznych, jest zasadne: w obiektywistycznej wizji Gödla, mamy do czynienia z niezależnymi od nas faktami. Jednym z owych faktów jest właśnie rozwiązywalność wszystkich dobrze postawionych problemów matematycznych – i ten fakt domaga się wyjaśnienia.

---

jest rozstrzygnięcie, czy jest on prawdziwy [chodzi tutaj o nowe aksjomaty dla teorii mnogości – K.W.] także na innej drodze, a mianowicie indukcyjnie – poprzez badanie jego „sukcesów". Sukcesy znaczą tu owocność w sensie konsekwencji, w szczególności „weryfikowalnych" konsekwencji, to znaczy konsekwencji dających się uzyskać bez stosowania nowego aksjomatu, których dowody z pomocą nowych aksjomatów są jednakże zdecydowanie prostsze i łatwiejsze do odkrycia i umożliwiają połączenie wielu różnych dowodów w jeden. […] Mogą […] istnieć aksjomaty tak bogate w weryfikowalne konsekwencje, rzucające tyle światła na całą dziedzinę i dające tak silne metody rozwiązywania problemów (nawet rozwiązywania ich w sposób konstruktywny, o ile to tylko jest możliwe), że niezależnie od tego, czy są one wewnętrznie konieczne, czy nie, powinny zostać przyjęte w takim samym sensie, jak każda dobrze zbudowana (*well-established*) teoria fizyczna" (Gödel, 1964, s. 113–114).

BIBLIOGRAFIA

Brumfiel G. W. (1979). *Partially Ordered Rings and Semi-Algebraic Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press.

Easton W. B. (1970). Powers of Regular Cardinals. *Annals of Mathematical Logic*, *1*(2), 139–178.

Ebbinghaus H-D., Fraser C. G., Kanamori A. (2010). *Ernst Zermelo. Collected Works. Gesammelte Werke. Vol. I.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Ellentuck E. (1975). Gödel's Square Axioms for the Continuum. *Mathematische Annalen*, *216*(1), 29–33.

Feferman S. (2000). Why the Programs for New Axioms Need to Be Questioned, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 6, 401–413.

Friedman H. (2000). Normal Mathematics Will Need New Axioms, *The Bulletin of Symbolic Logic*, *6*(4), 434–446.

Gödel K. (193?). Undecidable Diophantine Propositions. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 164–175). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1933). The Present Situation in the Foundations of Mathematics. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 45–53). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1939b). Vortrag Göttingen (Lecture at Göttingen). W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 127–155). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1944). Russell's Mathematical Logic. W: P. A. Schlipp (red.), *The philosophy of Bertrand Russell. Library of Living Philosophers, vol. 5* (s. 123–153). La Salle, Illinois: Open Court Publishing Company. Polskie tłumaczenie: Gödel, K. (2002). Logika matematyczna Russsella. W: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów* (s. 77–102). Warszawa: PWN.

Gödel K. (1946). Remarks Before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume II* (s. 150–153). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1951). Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 304–323). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1953/9). Is Mathematics Syntax of Language? W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 334–363). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1961). The Modern Development of the Foundations of Mathematics in the Light of Philosophy. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 374–387). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1964). What is Cantor's Continuum Problem? W: P. Benacerraf, H. Putnam (red.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (s. 258–272). Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc. Polskie tłumaczenie: Gödel, K. (2002). Co to jest Cantora problem kontinuum. W: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów* (s. 103–123). Warszawa: PWN.

Gödel K. (1970a). Some Considerations Leading to the Probable Conclusion, That the True Power of the Continuum Is $\aleph_2$. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 420–421). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1970b). A Proof of Cantor's Continuum Hypothesis from a Highly Plausible Axiom About Orders of Growth. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 422–423). Oxford: Oxford University Press.

Hafner J., Mancosu P. (2008). Beyond Unification, W: P. Mancosu (red.), *Philosophy of Mathematical Practice*, (s. 151–178). Oxford: Oxford University Press.

Hamkins J. D. (2012). The Set-Theoretic Multiverse. *Review of Symbolic Logic*, *5*(3), 416–449.

Hammond A. L. (1983). Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura. W: L. A. Steen (red.), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów* (s. 26–48). Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Hardy G. H. (1929). Mathematical Proof. *Mind*, *38*(149), 1–25.

Hauser K. (2002). Is Cantor's Continuum Problem Inherently Vague? *Philosophia Mathematica*, *10*(3), 257–292.

Hodges W. (2013). Alan Turing. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, pobrane z: https://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/turing/

Kant I. (1957). *Krytyka czystego rozumu. Tom I.* Warszawa: PWN.

Krajewski S. (2003). *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne*. Warszawa: Wydawnictwo IFiS PAN.

Levy A., Solovay R. M. (1967). Measurable Cardinals and the Continuum Hypothesis. *Israel Journal of Mathematics*, *5*(4), 234–248.

Maddy P. (1988a). Believing the Axioms. I. *Journal of Symbolic Logic*, *53*(2), 481–511.

Maddy P. (1988b). Believing the Axioms. II. *Journal of Symbolic Logic*, *53*(3), 736–764.

Maddy P. (1993) Does V Equal L? *Journal of Symbolic Logic*, *58*(1), 15–41.

Maddy P. (2000). Does Mathematics Need New Axioms? *The Bulletin of Symbolic Logic*, *6*(4), 413–422.

Mancosu P. (2008). Mathematical Explanation: Why It Matters. W: Mancosu P. (red.), *Philosophy of Mathematical Practice* (s. 134–150). Oxford: Oxford University Press.

Mancosu P. (2018). Explanation in Mathematics. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, pobrane z: https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/mathematics-explanation/

Marciszewski W. (2018). Does Science Progress towards Ever Higher Solvability through Feedbacks between Insights and Routines? *Studia Semiotyczne*, *32*(2), 153–185.

McCarty D. C. (2004). David Hilbert and Paul du Bois-Reymond: Limits and Ideals. W: Link G. (red.), *One Hundred Years of Russell's Paradox* (s. 517–532). Berlin, New York: Walter de Gruyter.

Mordell L. (1959). *Reflections of a Mathematician*. Montreal: Canadian Mathematical Congress.

Murawski R. (1984). G. Cantora filozofia teorii mnogości. *Studia Filozoficzne*, *11–12*(8–9), 75–88.

Paris J., Harrington L. (1977). A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic. W: J. Barwise (red.), *Handbook of Mathematical Logic* (s. 1133–1142), Amsterdam: North-Holland.

Pogonowski J. (2006). Projekt logiki infinitarnej Ernsta Zermela. *Investigationes Linguisticae*, XIV, 18–49.

Purkert W. (1989). Cantor's Views on the Foundations of Mathematics. W: D. E. Rowe, J. McCleary (red.), *The history of modern mathematics. Vol.1* (s. 49–65). San Diego: Academic Press.

Rav Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*(3), 5–41.

Rota G.-C. (1997). The Phenomenology of Mathematical Proof. *Synthese*, *111*(2), 183–196.

Solovay R. M. (1995). Introductory Note to *1970a, *1970b, *1970c. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 405–420). Oxford: Oxford University Press.

Steel J. R. (2000). Mathematics Needs New Axioms. *The Bulletin of Symbolic Logic*, *6*(4), 422–433.

Tieszen R. (1998). Gödel's Path from the Incompleteness Theorems (1931) to Phenomenology (1961). *The Bulletin of Symbolic Logic*, *4*(2), 181–203.

Wang H. (1987). *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge: MIT Press.

Wang H. (1996). *A logical journey. From Gödel to Philosophy*. Cambridge: MIT Press.

Woodin W. H. (1999). The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms and the Nonstationary Ideal. Berlin, New York: de Gruyter.

Woodin W. H. (2001). The Continuum Hypothesis. Parts I and II. *Notices of the AMS*, *48*(6–7), 567–576, 681–690.

Wójtowicz K. (2002). *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, Tarnów: Biblos.

THE NOTION OF EXPLANATION IN GÖDEL'S PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

SUMMARY: The article deals with the question of in which sense the notion of explanation (which is rather characteristic of empirical sciences) can be applied to Kurt Gödel's philosophy of mathematics. Gödel, as a mathematical realist, claims that in mathematics we are dealing with facts that have an objective character (in particular, they are independent of our activities). One of these facts is the solvability of all well-formulated mathematical problems – and this fact requires a clarification. The assumptions on which Gödel's position is based are: (1) metaphysical realism: there is a mathematical universe, it is objective and independent of us; (2) epistemological optimism: we are equipped with sufficient cognitive power to gain insight into the universe Gödel's concept of a solution to a mathematical problem is much broader than of a mathematical proof – it is rather about finding reliable axioms that lead to a (formal) solution of the problem. I analyze the problem presented in the article, taking as an example of the continuum hypothesis.

KEY WORDS: mathematical realism, mathematical explanation, incompleteness theorems, mathematical universe, continuum hypothesis.

Studia Semiotyczne, t. XXXII, nr 2 (2018), s. 131–152
ISSN 0137-6608, e-ISSN 2544-073X
DOI: 10.26333/sts.xxxii2.08
Rozprawa

Paweł Stacewicz*

LICZBY NIEOBLICZALNE A GRANICE KODOWANIA W INFORMATYCE[1]

Streszczenie: Opis danych i programów komputerowych za pomocą liczb jest epistemologicznie użyteczny, ponieważ pozwala określać granice różnego typu obliczeń. Dotyczy to w szczególności obliczeń dyskretnych (cyfrowych), opisywalnych za pomocą liczb obliczalnych w sensie Turinga. Matematyczny fakt istnienia liczb rzeczywistych innego typu, tj. nieobliczalnych, wyznacza minimalne ograniczenia technik cyfrowych; z drugiej strony jednak, wskazuje na możliwość teoretycznego opracowania i fizycznej implementacji technik obliczeniowo silniejszych, takich jak obliczenia analogowe-ciągłe. Przedstawione w artykule analizy prowadzą do wniosku, że fizyczne implementacje obliczeń niekonwencjonalnych (niecyfrowych) wymagają występowania w przyrodzie wielkości nieskończonych aktualnie (a nie tylko potencjalnie). Za fizycznym istnieniem takich wielkości przemawiają wprawdzie pewne argumenty fizyki teoretycznej, nie są one jednak ostateczne.

Słowa kluczowe: kodowanie liczbowe, liczby obliczalne, liczby nieobliczalne, maszyna Turinga, obliczenia cyfrowe, obliczenia analogowe, nieskończoność.

* Politechnika Warszawska, Wydział Administracji i Nauk Społecznych. E-mail: p.stacewicz@ans.pw.edu.pl. ORCID: 0000-0003-2500-4086.

[1] Dziękuję dwóm anonimowym recenzentom za cenne uwagi i wskazówki, które pozwoliły istotnie ulepszyć pierwotną wersję tekstu. Dziękuję także profesorom Witoldowi Marciszewskiemu i Andrzejowi Biłatowi za owocną merytorycznie i redakcyjnie dyskusję nad tekstem. Za wszelkie pozostałe w pracy błędy, niejasności i niedociągnięcia ponoszę odpowiedzialność ja sam i z góry przepraszam za nie wszystkich Czytających.

Z przyjętego w niniejszej pracy punktu widzenia obiekty informatyczne, w szczególności zaś programy komputerowe, pośredniczą między matematyczną sferą liczb a fizykalną rzeczywistością. Przykładowo: program odtwarzający dźwięki operuje na liczbowych reprezentacjach fal akustycznych, a jego instrukcje powodują, wskutek odpowiedniej konstrukcji komputera, realne fizyczne drgania cząsteczek powietrza. Co więcej, i ten i każdy inny program można analizować na dwóch poziomach, czyli jako obiekt dwojakiego rodzaju: z jednej strony jako ciąg sprowadzalnych do liczb symboli, z drugiej zaś – jako ściśle określony układ fizycznych stanów maszyny (które po uruchomieniu programu powodują regularne zmiany jej kolejnych stanów)[2].

Z uwagi na wskazane odpowiedniości wiele kwestii dotyczących komputerów można rozstrzygać, odnosząc się do własności liczb – takich liczb, które zgodnie z właściwym danej maszynie modelem obliczeń (np. cyfrowym lub analogowym) odpowiadają danym, tekstom i wynikom działania programów.

W obecnej pracy skupię się na programach dla maszyn cyfrowych. Są one opisywane teoretycznie za pomocą Turingowskiego modelu obliczeń (uniwersalnej maszyny Turinga), a ujmując rzecz „liczbowo", za pomocą liczb obliczalnych w sensie Alana Turinga. Powołując się na pewne własności liczb obliczalnych i nieobliczalnych, w szczególności zaś na fakt, że reprezentacje cyfrowe liczb nieobliczalnych cechuje nieskończoność aktualna, określę teoretyczne powody istnienia obliczeniowych ograniczeń takich programów. Przedyskutuję także możliwość pokonania tych ograniczeń za pomocą technik informatycznych, które dopuszczają (teoretycznie) przetwarzanie sygnałów opisywanych przy użyciu liczb nieobliczalnych w sensie Turinga.

Przedstawiony tekst ma w przeważającej części charakter przeglądowy. Zawiera jednak szereg autorskich interpretacji wyników badań informatycznych i metainformatycznych (np. A. Turinga i G. Chaitina), w szczególności zaś interpretacje dotyczące infinitystycznego charakteru liczb nieobliczalnych i rozważanych w informatyce teoretycznej kodów.

---

[2] Niektórzy filozofowie informatyki mówią wprost – przyjmując nastawienie ontologiczne, a nie epistemologiczne – o dualnej, tj. abstrakcyjno-fizycznej, naturze programów komputerowych (Moor, 1978; Colburn, 2000; zob. też Angius, Turner, 2013).

1. Liczby, obliczenia i kodowanie liczbowe

Najważniejszą i najstarszą zarazem ideą, która zaowocowała powstaniem komputerów, a następnie informatyki, jest idea kodowania liczbowego[3]. Stoi za nią przekonanie, że świat liczb (być może nawet tylko naturalnych) i stosunkowo prostych operacji na nich (jak porównywanie, dodawanie czy dzielenie) jest wystarczająco bogaty, aby można w nim było reprezentować różne aspekty świata rzeczywistego.

We współczesnej informatyce *kodowanie liczbowe*, rozumiane jako zapisywanie danych przetwarzanych przez komputery za pomocą liczb[4], jest czynnością powszechną, a być może teoretycznie niezbędną[5]. Jest ono obecne już na poziomie wstępnej formalizacji niektórych zadań, kiedy to występujące w tych zadaniach obiekty (np. tekstowe, dźwiękowe czy graficzne) opisuje się za pomocą specjalnie dobranych i ujętych w odpowiednie struktury liczb. Dla przykładu: znakom przetwarzanym przez edytory tekstowe przypisuje się ściśle określone liczby (zgodnie np. z kodem ASCII), zaś wyświetlane na monitorach obrazy koduje się często w postaci sekwencji liczb, które określają współrzędne i kolory punktów na rastrowej matrycy. Na najniższym poziomie wewnątrzkomputerowych struktur odpowiednie kody powstają w sposób automatyczny, za sprawą specjalnie zaprojektowanych programów

---

[3] Jej najstarszym bodaj przejawem była filozofia starożytnych pitagorejczyków, która postulowała sprowadzalność wszelkich fragmentów rzeczywistości do pewnego rodzaju liczb (co streszcza się w krótkim haśle, że „wszystko jest liczbą"). We współczesnym myśleniu filozoficznym, zwłaszcza w kontekście filozofii informatyki, idee pitagorejskie odżywają, co niektórzy określają mianem neopitagoreizmu. Dzieje się tak za sprawą swoistego sprzężenia zwrotnego: idee pitagorejskie przyczyniły się do powstania informatyki, a sukcesy tejże, m. in. na polu symulacji zjawisk fizycznych za pomocą operacji na reprezentowanych komputerowo liczbach, wzmacniają pitagorejską wizję świata. (Krajewski, 2014).

[4] W kontekście informatycznym sformułowanie „zapisywanie danych przetwarzanych przez komputery za pomocą liczb" ma najczęściej sens syntaktyczny, a nie abstrakcyjny. Znaczy to, że chodzi w nim o zapisywanie danych za pomocą symbolicznych (i fizycznych) reprezentacji liczb, np. ciągów zero-jedynkowych. W obecnym tekście będę odwoływał się również do abstrakcyjnych (*stricte* matematycznych) własności liczb i ich zbiorów, takich jak ciągłość zbioru liczb rzeczywistych. W przypadku niewystarczającego kontekstu będę sygnalizował jednak, czy w danym miejscu chodzi o abstrakcyjny czy syntaktyczny wymiar pojęcia liczby (pisząc np. że chodzi o rozwinięcie dziesiętne liczby).

[5] Por. dyskusję internetową na blogu Cafe Aleph, która wynikła przy okazji powstawania tej pracy (Stacewicz, 2018b).

(np. kompilatorów). Najważniejsze jednak, że w ujęciu matematycznym, abstrahującym od fizycznej konstrukcji komputera i fizycznych procesów przetwarzania sygnałów, da się je przedstawić liczbowo, na przykład binarnie.

Trzy ostatnie słowa poprzedniego akapitu wskazują, że termin „kodowanie liczbowe" rozumiem w obecnej pracy szeroko. W szczególności rozumiem go szerzej niż termin „kodowanie cyfrowe", który rezerwuję dla sposobu reprezentowania informacji w komputerach cyfrowych, będących maszynami o stanach dyskretnych, operującymi na sygnałach binarnych. Szeroki termin „kodowanie liczbowe" uznaję za zasadny, ponieważ w ogólnie pojętej informatyce rozważa się szerszą klasę maszyn niż cyfrowe. Do owej szerszej klasy należą układy analogowe, które pozwalają (przynajmniej teoretycznie) operować na sygnałach ciągłych opisywanych przez liczby rzeczywiste[6], a także komputery kwantowe, w przypadku których podstawową jednostkę informacji stanowi q-bit, definiowany matematycznie przy użyciu liczb zespolonych[7].

Z pojęciem kodowania liczbowego wiąże się ściśle kluczowe dla informatyki pojęcie *obliczania*. W kontekście rozwiązywania problemów oznacza ono mechaniczną realizację procesu wyznaczania wartości funkcji, która przyporządkowuje danym wejściowym problemu jego konkretne rozwiązania (rozwiązania dla konkretnych danych)[8]. Jeśli dane są kodowane liczbowo, to argumentami i wartościami tejże funkcji są tego typu liczby (np. naturalne lub rzeczywiste), które dopuszcza właściwy danej maszynie sposób kodowania. Ten zaś jest wyznaczony

[6] Por. prace Shannona (1941) oraz Rubela (1993).

[7] Terminu „kodowanie liczbowe" używam także w innej pracy (Marciszewski, Stacewicz, 2011, s. 75–77). Podobnej konwencji pojęciowej jest bliski S. Krajewski, który nie stosuje wprawdzie terminu „kodowanie liczbowe", ale wyróżnia digitalizację jako jeden tylko z typów kodowania (choć najbardziej powszechny), zasadniczo różny od kodowania danych w układach analogowych przetwarzających sygnały opisywane przez liczby rzeczywiste (Krajewski, 2014).

[8] Historycznie rzecz biorąc, pierwsze dojrzałe rozważania o rozwiązywaniu problemów za pomocą obliczeń, tj. mechanicznych operacji na fizycznych odpowiednikach liczb, zawdzięczamy G.W. Leibnizowi. Dla współczesnej koncepcji obliczania szczególnie ważne są następujące jego pomysły i dokonania: konstrukcja maszyny liczącej (wykonującej cztery podstawowe działania arytmetyczne), wynalazek binarnego systemu arytmetycznego, projekt maszyny operującej na binarnych zapisach liczb, a ponadto koncepcja uniwersalnego języka symbolicznego (*lingua charakteristica*) oraz sprzężonego z nim niezawodnego rachunku (*calculus ratiocinator*). Zob. Trzęsicki (2006).

przez odpowiedni model obliczeń (np. cyfrowy lub analogowy). Dopowiedzmy jeszcze, że informatycznym, a nie czysto matematycznym, zapisem obliczanej funkcji jest albo tekst programu (jeśli dana maszyna akceptuje programy napisane w pewnym języku programowania), albo schemat połączeń między elementarnymi układami maszyny (o ile maszynę programuje się fizycznie, tak jak układy analogowe czy pierwsze komputery cyfrowe).

Ponieważ zdecydowana większość dzisiejszych komputerów realizuje obliczenia cyfrowe, w kolejnych akapitach przyjrzę się bliżej „liczbowej" charakterystyce powierzanych im zadań. W szczególności rozważę pytanie o to, czy pożądane w ich opisie kody liczbowe muszą mieć charakter skończony, czy też niekiedy trzeba odwołać się do pojęcia kodu nieskończonego[9]?

Na pierwszy rzut oka wszelkie wchodzące w grę kody są skończone, tym samym zaś sprowadzalne do liczb naturalnych. Sugeruje to obserwacja, że wprowadzane do komputera cyfrowego dane mają reprezentację skończoną, a stosowane do ich przetwarzania programy są skończonymi sekwencjami instrukcji, które po zakodowaniu w postaci binarnej można interpretować jako liczby naturalne. Głębszy namysł nad funkcjami komputerów cyfrowych prowadzi jednak do stwierdzenia, że teoretyczna analiza możliwości tych komputerów musi odwoływać się do pojęcia kodu n i e s k o ń c z o n e g o (nawet jeśli kodów tego rodzaju nie da się zaimplementować wewnątrz realnych maszyn cyfrowych). Należy przy tym rozróżnić dwa konteksty możliwych odwołań.

[9] Pojęcie kodu nieskończonego – czyli takiego wyniku procesu kodowania, który ma nieskończoną (aktualnie) długość – jest pojęciem niestandardowym, wykraczającym poza standardową teorię obliczalności, wyrażoną np. w terminach maszyn Turinga. Niemniej, we współczesnej metodologii informatyki, która uwzględnia również pewne niestandardowe modele obliczeń, pojęcia tego się używa – mówiąc np. o nieskończonej długości kodach programów czy zapisanej w całości nieskończonej taśmie maszyny Turinga (Ord, 2002, s. 17; Ord, 2016, s. 146; Mycka, Olszewski, 2015, s. 58–59). Podkreślmy jednak, że pojęcie to nabiera sensu wówczas, gdy założy się (nawet roboczo) możliwość wykroczenia poza tradycyjny Turingowski model obliczeń. Użycie pojęcia nieskończonego kodu jest w obecnej pracy uzasadnione, ponieważ w dalszej jej części (zwłaszcza w rozdziale 4.) będę analizował możliwość fizycznej realizacji obliczeń pozaturingowskich, również takich, które obejmują elementy infinitystyczne. Niezależnie od tej intencji, już w tym rozdziale jednak pokażę, jak (ogólna) analiza problemów, które chcielibyśmy rozwiązywać tradycyjnie (tj. cyfrowo), prowadzi do konieczności krytycznego przynajmniej rozważenia kodów nietradycyjnych (tj. nieskończonych).

Po pierwsze, w przypadku wielu realnych problemów (np. z zakresu dynamiki czy mechaniki) wyniki uzyskiwane dla konkretnych danych wejściowych mogą wyrażać się *liczbami niewymiernymi*, a więc takimi, które mają nieskończone i nieregularne rozwinięcia (np. dziesiętne). Dzieje się tak na przykład wtedy, gdy dany problem jest sformułowany matematycznie za pomocą pewnego równania (np. różniczkowego), a pierwiastkiem tego równania jest liczba niewymierna (jak $\sqrt{2}$, π czy e). W takim przypadku poszukiwany wynik jest *de facto* reprezentowany przez liczbę o nieskończonym rozwinięciu. Zauważmy wstępnie, przed dokładniejszymi wyjaśnieniami w rozdziale 3, że najbardziej kłopotliwa sytuacja występuje wtedy, gdy mamy do czynienia z tego rodzaju liczbą niewymierną, która jest przestępna, a dodatkowo nieobliczalna w sensie Turinga.

Po drugie jednak, co dla dalszych analiz jest kluczowe, każde bardziej skomplikowane zadanie programistyczne ma strukturę *infinitystyczną*. Znaczy to, że zbiór jego danych początkowych, a niekiedy także zbiór jego potencjalnych wyników, jest nieograniczony. Jako prosty przykład rozważmy problem wyznaczania pierwiastków równań kwadratowych $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie zakres możliwych do wprowadzenia współczynników a, b, c jest nieograniczony. W przypadku tego akurat problemu istnieje, mimo nieograniczonej dziedziny, skończona metoda znajdowania szukanych wartości x, którą jest powszechnie znany algorytm „delty". Istnieje również skończony program (niejeden), który dla dowolnej danej wejściowej (tj. układu współczynników a, b, c) pozwala, w skończonej liczbie kroków, wygenerować poprawny wynik. Ów program trzeba potraktować jako ogólne (komputerowe) rozwiązanie postawionego problemu, któremu to rozwiązaniu odpowiada skończony kod liczbowy programu (mówiąc krótko: pewna liczba)[10].

Niestety, w przypadku innych problemów o nieograniczonej dziedzinie danych wejściowych liczbowy kod ogólnego rozwiązania – bę-

---

[10] Podkreślmy tutaj, że jakkolwiek kwestia nieskończonej dziedziny danych wejściowych może być nieistotna z punktu widzenia rozwiązania zadania algorytmicznego, to fakt, że rozwiązanie to obowiązuje dla nieograniczonej liczby danych wejściowych, stanowi o jego sile. Jest to rozwiązanie w pewnym sensie uniwersalne (na podobieństwo twierdzeń matematycznych ma ono zastosowanie do nieskończonej liczby przypadków szczególnych). W niektórych jednak sytuacjach nieskończona dziedzina może prowadzić do kłopotów – o czym dalej w głównym tekście (zob. także Stacewicz, 2015).

dący cyfrowym zapisem wszystkich możliwych par <DANE WEJŚCIOWE, WYNIK>, a mówiąc inaczej, funkcji przyporządkowującej danym wyniki – musi pozostać *nieskończony*. Dzieje się tak, kiedy nie istnieje skończony program rozwiązujący ów problem. Jeśli program taki istnieje, stanowi on „zrozumiałą" dla maszyny cyfrowej formę zakodowania zbioru wspomnianych par w postaci procedury generującej poprawne wyniki (dla wszelkich możliwych danych wejściowych). Kodowi takiej procedury odpowiada przy tym jakaś liczba naturalna (zapisana np. jako ciąg zer i jedynek). Jeśli program taki nie istnieje, trzeba przyjąć, że całościowemu rozwiązaniu problemu odpowiada jakaś liczba nieobliczalna w sensie Turinga (tj. pewna specjalna liczba niewymierna o nieskończonym i niewyznaczalnym za pomocą maszyn cyfrowych rozwinięciu; zob. dalej w rozdziale 2.).

W interesującym nas tu kontekście rozwiązywania problemów za pomocą obliczeń, nieskończone kody liczbowe mogą wystąpić zatem na dwóch poziomach: 1) na poziomie kodu dokładnego *jednostkowego wyniku*, 2) na poziomie kodu *całościowego rozwiązania* problemu. W obydwu przypadkach może się zdarzyć, że odpowiedni kod ma postać liczby nieobliczalnej i wówczas – jak zobaczymy w rozdziale 3. – poszukiwana metoda rozwiązania problemu leży poza granicami możliwości kodowania cyfrowego (co nie wyklucza jednak istnienia takiej metody, która byłaby implementowalna na innego rodzaju maszynach niż cyfrowe).

2. Liczby nieobliczalne w sensie Turinga

Uwypuklone w tytule niniejszego artykułu *liczby nieobliczalne* zdefiniował Alan Turing w pracy z roku 1936 pt. *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*. Określił je jako tego rodzaju liczby niewymierne, których przedstawienia dziesiętnego nie może wyznaczyć, z dowolną zadaną dokładnością, żaden układ do obliczeń mechanicznych, zwany dziś maszyną Turinga[11]. We współczesnej stylistyce powiedzielibyśmy, że są to liczby niewyznaczalne za po-

[11] Warto dodać, że Turing podał w pierwszej kolejności ścisłą definicję zbioru liczb obliczalnych (liczb, których zapis dziesiętny można wyznaczyć ostatecznie lub z dowolną zadaną dokładnością za pomocą skończonego programu dla maszyny Turinga), a następnie udowodnił istnienie liczb rzeczywistych innego typu (zob. dalej w głównym tekście), czyli liczb nieobliczalnych (Turing, 1936).

mocą algorytmów dla maszyn cyfrowych, a zatem takie, dla których nie istnieją skończone programy komputerowe pozwalające obliczać krok po kroku kolejne cyfry ich dziesiętnych lub innych reprezentacji (mimo że reprezentacje takie są ściśle określone, zob. Stacewicz, 2012). Przykładowo: niewymierna liczba *e* nie wykazuje powyższych właściwości, ponieważ stosunkowo łatwo jest generować kolejne cyfry jej rozwinięcia za pomocą programu obliczającego kolejne sumy częściowe odpowiedniego szeregu (przypomnijmy, że $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$). Nie jest to zatem liczba nieobliczalna, choć cechuje ją niewymierność.

W odróżnieniu od niewymiernej liczby *e* wielkości nieobliczalne w sensie Turinga są definiowane w sposób wykluczający możliwość ich sukcesywnego przybliżania za pomocą maszyn Turinga lub równoważnych im mechanizmów obliczeniowych.

Przesądza o tym oryginalne rozumowanie Turinga, który zdefiniowawszy liczby obliczalne, udowodnił, że istnieją liczby rzeczywiste innego typu, a następnie określił zbiór liczb nieobliczalnych jako dopełnienie zbioru liczb obliczalnych do zbioru liczb rzeczywistych. Rozumowanie to przedstawię w sposób szkicowy i poglądowy – ograniczając je do liczb rzeczywistych z przedziału (0,1)[12].

Punktem wyjścia wywodu jest stwierdzenie, że wynikowi działania każdej maszyny Turinga dla określonych danych wejściowych – maszyny generującej ciągi cyfr ze zbioru {0,1…,9} – odpowiada jednoznacznie pewna liczba rzeczywista z przedziału (0,1). Jest to taka liczba, której rozwinięcie dziesiętne jest tożsame z generowanym przez maszynę ciągiem cyfr, skończonym bądź nieskończonym.

Ze względu na fakt, że każdą maszynę wraz z danymi wejściowymi określa jednoznacznie pewien unikatowy ciąg symboli (reprezentujących jej program oraz początkową zawartość taśmy), każdej z nich można przypisać unikatowy numer, zaś wszystkie maszyny można ustawić w nieskończony przeliczalny ciąg. Zgodnie z kolejnością w tym ciągu można ustawić następnie wszystkie sekwencje cyfr generowane przez kolejne maszyny. Sekwencje te tworzą nieskończony zbiór przeliczalny i wyznaczają jednoznacznie wszystkie liczby o b l i c z a l n e

[12] W przedstawionym rozumowaniu Turing posłużył się umiejętnie techniką przekątniową, którą po raz pierwszy zastosował G. Cantor w dowodzie nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych.

z przedziału (0,1). Są to liczby o rozwinięciach dziesiętnych tożsamych z kolejnymi sekwencjami.

Dysponując określoną wyżej listą sekwencji, można spytać, czy występuje na niej taka sekwencja S, że jej *n*-ta cyfra różni się (np. o 1) od *n*-tej cyfry *n*-tej sekwencji na liście (o ile *n*-ta sekwencja jest wystarczająco długa). Postulowana sekwencja S nie może występować na liście, ponieważ różni się (co najmniej jedną cyfrą) od każdej z sekwencji ustawionych w ciąg. Różni się zatem od dowolnej sekwencji, generowanej przez dowolną maszynę. Sekwencja ta musi zatem określać liczbę z przedziału (0,1), której żadna maszyna nie jest w stanie wygenerować, a więc rzeczywistą liczbę nieobliczalną (Turing, 1936; Marciszewski, Stacewicz, 2011)[13].

Pierwszą ścisłą definicję liczb nieobliczalnych pewnego rodzaju podał współczesny matematyk, Gregory Chaitin. Są to liczby *Omega*, które dla uniwersalnej maszyny Turinga danego typu (tzn. maszyny o określonej liczbie stanów i symboli alfabetu) określają prawdopodobieństwo, że losowo wybrany program działania takiej maszyny zatrzyma się[14]. Wyjaśnijmy dodatkowo, że przez program działania rozumie się tutaj początkową zawartość taśmy maszyny uniwersalnej, na którą składa się odpowiednio zakodowany program maszyny symulowanej oraz jego dane początkowe[15]. Chodzi zatem o dane wejściowe maszyny uniwersalnej, które jednak określają ściśle jej kolejne działania (maszyna uniwersalna realizuje program maszyny konkretnej dla

---

[13] Zauważmy jeszcze, że zaproponowana wyżej procedura określania sekwencji *S* jest nieefektywna (choć teoretycznie dozwolona), ponieważ ze względu na nierozwiązywalność problemu stopu maszyn Turinga (w cytowanej pracy Turinga znajdziemy odpowiedni dowód) nie wiemy, która z maszyn generujących sekwencje zestawione na liście zatrzymuje się, a która nie (co więcej: w drugim przypadku nie wiemy, czy głowica maszyny nie „nawróci" w którymś cyklu i nie zmieni wspomnianej wyżej *n*-tej cyfry). Do zagadnienia stopu nawiążemy dalej, definiując liczbę nieobliczalną *L*.

[14] W literaturze przedmiotu pisze się często o jednej liczbie Omega (zob. np. Trzęsicki, 2006a, s. 125–126). Jest to jednak mylące, ponieważ dla każdej uniwersalnej maszyny Turinga (maszyn takich jest przeliczalnie nieskończenie wiele) istnieje osobna, mająca inną reprezentację symboliczną, liczba Omega.

[15] Oprócz tak rozumianego programu każda maszyna uniwersalna ma swój unikatowy (definiujący ją) program „wykonawczy", który określa sposób realizacji każdego programu umieszczanego na taśmie (reguluje on m.in. to, w jaki sposób głowica maszyny przemieszcza się między kodem programu maszyny symulowanej i jego danymi wejściowymi).

konkretnych danych). Ponieważ konstrukcja podana przez Chaitina jest dosyć złożona i służy określeniu formuły na wspomniane prawdopodobieństwo (Chaitin, 1993; Chaitin, 2005), zaproponuję tu koncepcyjnie prostszą definicję innej wielkości nieobliczalnej. Zachowam przy tym oryginalny pomysł Chaitina, polegający na odwołaniu się do zagadnienia stopu maszyn Turinga[16].

Punktem wyjścia anonsowanej definicji jest sporządzenie uporządkowanej listy programów dla uniwersalnej maszyny Turinga pewnego typu. Podobnie jak w przypadku konstrukcji Chaitina przez program rozumiem tu zawartość początkową taśmy maszyny uniwersalnej (obejmującą kod programu pewnej maszyny konkretnej i jego dane wejściowe). Ponieważ wspomniana lista jest przeliczalnie nieskończona[17], to znajdujące się na niej programy (z danymi) można ponumerować jako p_1, p_2, p_3 itd. Odnosząc się do tejże listy, można zdefiniować następującą, zapisaną binarnie liczbę L z przedziału (0,1): $L = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$, gdzie bit $b_i = 1$, jeśli program p_i zatrzymuje się, zaś $b_i = 0$, jeśli program p_i nie zatrzymuje się (dopowiedzmy, że $i \in N$)[18].

---

[16] Przypomnijmy, że zagadnienie to wyraża się pytaniem o istnienie takiej (diagnostycznej) maszyny Turinga, która dla każdej innej maszyny Turinga i każdych jej danych wejściowych byłaby w stanie jednoznacznie rozstrzygać, czy ta właśnie maszyna, dla tych właśnie danych wejściowych zakończy pracę, czy też będzie pracować w nieskończoność.

[17] Jest ona nieskończona, ponieważ ze względu na nieskończoną długość taśmy maszyny uniwersalnej istnieje nieskończenie wiele danych wejściowych, które można na niej umieścić (mimo skończonej liczby symboli alfabetu i skończonej liczby stanów symulowanych maszyn konkretnych).

[18] Jak zauważa Chaitin, kwestia odpowiedniego doboru listy, tj. sposobu uporządkowania zbioru programów, jest niezwykle ważna. Należy podkreślić, że jest ona ważna nie tylko w przypadku definiowania liczb Omega (w ich przypadku Chaitin podał szczególny sposób określenia listy), ale również w przypadku definiowania innego typu liczb nieobliczalnych (Chaitin, 1993). Jeden z anonimowych recenzentów niniejszej pracy stwierdził słusznie, że typ określonej w głównym tekście liczby L (obliczalna czy nieobliczalna), zależy od sposobu uporządkowania zbioru programów p_i (czyli sposobu sporządzenia ich listy). W szczególności: dla pewnych porządków można uzyskać liczby obliczalne (jak np. 2/3). Aby problem ten rozwiązać, można przyjąć wzmiankowaną wyżej definicję listy Chaitina. Niezależnie od powyższych wyjaśnień trzeba podkreślić jednak, że liczba L jest zdefiniowana w taki sposób, że nawet jeśli występująca w jej definicji lista powoduje jej obliczalność, to sama ta definicja nie pozwala stwierdzić tejże obliczalności za pomocą jakichkolwiek operacji realizowalnych przez maszyny Turinga. Dzieje się tak, ponieważ podstawą definicji jest problem stopu, a jego nierozstrzygalność powoduje, że nie można stwierdzić (zawczasu), które programy na liście zatrzymują

Zauważmy, że liczba L jest ściśle określona – ponieważ programy p_i definiujące jej kolejne bity albo zatrzymują się, albo nie. Nie jest natomiast obliczalna, to znaczy algorytmicznie wyznaczalna – ponieważ określająca wartości kolejnych bitów kwestia stopu nie daje się algorytmicznie rozstrzygnąć w skończonym czasie. Przykład ten ponownie pokazuje, że nieobliczalność w sensie Turinga jest silnie powiązana z nieskończonością. Liczba L ma bowiem nieskończone i niewyznaczalne za pomocą skończonego programu rozwinięcie (niewyznaczalne w tym sensie, że obliczenie niektórych jego cyfr musiałoby trwać nieskończenie długo).

Rozwijając „wątek nieskończoności" w kontekście bardziej ogólnym, trzeba stwierdzić, że wszelkie liczby nieobliczalne w sensie Turinga cechuje nieskończoność aktualna (a nie potencjalna[19]). Każda ich reprezentacja symboliczna (np. dziesiętna) zawiera bowiem nieskończoną liczbę cyfr, która musi być rozumiana jako nieskończona całość, niemożliwa do stopniowego generowania, cyfra po cyfrze, za pomocą jakiegokolwiek skończonego programu (dla maszyny cyfrowej)[20].

Wyjaśnijmy na koniec, że klasa liczb nieobliczalnych w sensie Turinga jest niezwykle obszerna, ponieważ ma moc *continuum*, a więc jest równoliczna ze zbiorem liczb rzeczywistych. W odróżnieniu od niej klasa liczb obliczalnych, a więc takich, które są algorytmicznie wyznaczalne za pomocą maszyn Turinga, ma moc *aleph zero*, a więc jest równoliczna ze zbiorem liczb naturalnych[21]. Owa dysproporcja między

---

się, a które nie. Mówiąc krótko: być może dla pewnej listy programów liczba L jest obliczalna, ale my, posługując się wyłącznie obliczeniami Turingowskimi, nie jesteśmy w stanie tego określić.

[19] W sprawie rozróżnienia między nieskończonością potencjalną i aktualną zob. Murawski (2014). Na uwagę zasługuje również tekst Witolda Marciszewskiego o nieskończoności (Marciszewski, 2012).

[20] Aktualną nieskończoność liczby nieobliczalnej obrazuje dobrze następująca metafora: gdyby jakiś ponadalgorytmiczny Boski Umysł zechciał podzielić się z nami wiedzą o pewnej liczbie nieobliczalnej X, to musiałby wyjawić ją nam w całości, całości nieskończonej, natomiast nie byłby w stanie dostarczyć zwięzłej algorytmicznej reguły opisującej ją w skończony sposób. Jest to swobodna parafraza uwag Chaitina (Chaitin, 1998, s. 54–55). O różnicy między typami nieskończoności przysługujących zapisom liczb obliczalnych (nieskończoność potencjalna) i zapisom liczb nieobliczalnych (nieskończoność aktualna) wypowiadam się szerzej w innej pracy (Stacewicz, 2018a, s. 180–181).

[21] Wynika to z faktu, że wszystkie maszyny generujące unikatowe ciągi symboli składających się na symboliczne przedstawienia liczb obliczalnych można ponu-

nieskończonościami przysługującymi zbiorom liczb obliczalnych i nieobliczalnych wydaje się zaskakująca: wszystko to, co mogą wygenerować maszyny Turinga, okazuje się być „kroplą w oceanie nieobliczalności".

3. Minimalne ograniczenia realnych kodów cyfrowych

Przez *realne kody cyfrowe* rozumiem tutaj liczbowe kody faktycznych, możliwych do fizycznej implementacji, programów, które to programy reprezentują w skończony sposób funkcje wiążące ze sobą dane wejściowe i wyniki obliczeń. Ze względu na obliczeniową równoważność (wyidealizowanych) komputerów cyfrowych i maszyn Turinga[22] wyniki tychże obliczeń są zawsze cyfrowymi reprezentacjami jakichś liczb obliczalnych w sensie Turinga (ewentualnie ich fragmentów, o ile dana liczba ma nieskończone rozwinięcie).

Z uwagi na wspomnianą równoważność ogólne ograniczenia realnych kodów cyfrowych – ograniczenia, którym muszą podlegać wszelkie programy, dla wszelkich maszyn cyfrowych – daje się wyznaczać w ramach Turingowskiego modelu obliczeń, który ma postać abstrakcyjnej maszyny uniwersalnej, zwanej uniwersalną maszyną Turinga (UMT)[23]. Mówiąc dokładniej: jeśli rozwiązania pewnego problemu nie da się zakodować w postaci programu dla UMT, to nie da się go zapisać również jako procedury wykonywalnej przez pewną maszynę cyfrową[24]. Co nie oznacza – dodajmy to koniecznie – że

merować i ustawić w nieskończony ciąg. Zbiór liczb nieobliczalnych musi mieć natomiast moc *continuum*, ponieważ jest określony jako różnica zbioru $\mathbb{R}$ (o mocy *continuum*) i zbioru liczb obliczalnych (o mocy *aleph zero*).

[22] Mówiąc dokładniej, każdy program pewnej maszyny cyfrowej (niezależnie od technicznych szczegółów jej konstrukcji) można przełożyć na program maszyny Turinga, w szczególności zaś na program maszyny uniwersalnej. Mimo to ze względu na czysto fizyczne ograniczenia realnych maszyn cyfrowych (nie idealnych, lecz realnych), nie wszystkie zadania „wykonalne" dla UMT, są wykonalne dla nich. Temat ten zostanie rozwinięty dalej, w głównym tekście tego rozdziału.

[23] Dopowiedzmy, że uniwersalna maszyna Turinga jest to taka maszyna, która za sprawą specjalnie dobranego, definiującego ją programu jest w stanie symulować działanie każdej konkretnej maszyny Turinga (Harel, 2000, s. 252).

[24] Szeroką gamę problemów nieobliczalnych w modelu Turinga opisuje np. Harel (2000, s. 201–224). O pewnych istotnych problemach metamatematycznych tego typu wspomina również Gödel (1995/2018, s. 13, w niniejszym tomie).

nie da się jej określić w postaci procedury dla maszyny innego typu, np. analogowej.

Z punktu widzenia niniejszych rozważań kluczową rolę odgrywa tutaj zagadnienie wyznaczania liczb nieobliczalnych, a dokładniej ich kolejnych cyfr, składających się na ich symboliczne reprezentacje. Liczby takie mają poprawne definicje, ich kolejne cyfry (np. 0 i 1) są dokładnie określone, a mimo to nie istnieje program dla maszyny Turinga, który pozwalałby w skończonym czasie, z dowolną zadaną dokładnością, liczby takie wyznaczać. A zatem funkcje odpowiadające poszczególnym liczbom nieobliczalnym – funkcje wiążące zadawaną dokładność (np. numer ostatniej żądanej cyfry dziesiętnego rozwinięcia liczby) z odpowiednim fragmentem liczby – określają granice kodowania cyfrowego. Jeśli ogólne rozwiązanie danego problemu jest sprowadzalne do tego rodzaju funkcji, to rozwiązania tego nie da się zakodować cyfrowo. Mówiąc jeszcze inaczej: jeśli dla pewnego problemu *P* każdy liczbowy kod funkcji wiążącej jego dane wejściowe i wyniki jest zapisem pewnej liczby nieobliczalnej, to problem ów leży (wtedy i tylko wtedy) poza granicami możliwości kodowania cyfrowego. W ten sposób, tj. objaśniając kwestię nierozwiązywalności problemów za pomocą pewnego typu maszyn w kategoriach liczbowych, zyskujemy pewien nowy wgląd zarówno w powody, jak i w hipotetyczne możliwości przezwyciężenia Turingowskiej nieobliczalności.

Ograniczenia wyznaczone przez liczby nieobliczalne, a dokładniej przez skojarzone z nimi funkcje generujące ich symboliczne reprezentacje, należy traktować jako ograniczenia minimalne, niezależne od fizycznej charakterystyki maszyn cyfrowych. Stwierdzenie to wynika z faktu, że maszyna UMT jest obliczeniowo równoważna nie fizycznym maszynom cyfrowym, lecz komputerom teoretycznym, o nieskończonych zasobach pamięciowych i dowolnie długim, choć skończonym, czasie działania[25]. Znaczy, to że maszyna UMT jest w stanie „wykonać" więcej zadań niż fizyczne maszyny cyfrowe pewnego typu (np. maszyny o maksymalnej pamięci RAM 8 MB). Stąd wniosek, że ograniczenia realnych fizycznych komputerów i sterujących nimi kodów cyfrowych są tak naprawdę większe niż ograniczenia maszyn

[25] Za potencjalnie nieskończone zasoby pamięciowe oraz potencjalnie nieskończony czas działania odpowiada w modelu UMT nieskończona taśma (Stacewicz, 2018a).

wyidealizowanych, czyli maszyn Turinga. Ograniczenia tych ostatnich stanowią zatem „matematyczne minimum", obejmujące swoim zasięgiem wszelkie komputery cyfrowe.

Powróćmy jednak do własności liczb nieobliczalnych. Przypomnijmy za rozdziałem 2., że wszelkie zapisy takich liczb cechuje nieskończoność aktualna. Zapisy te stanowią bowiem nieskończone całości – to znaczy, nieskończone sekwencje symboli, których nie wyznacza żadna skończona reguła, mająca postać skończonego programu dla maszyny Turinga. Patrząc z takiej perspektywy, za matematyczną „przyczynę" Turingowskiej nieobliczalności problemów trzeba uznać nieskończoność aktualną – nieskończoność przysługującą zapisom liczb, które musiałyby kodować rozwiązania tychże problemów.

Z uwagi na wskazane wcześniej odpowiedniości między konkretnymi liczbami tego typu a problemami cyfrowo nieobliczalnymi (np. określona wcześniej liczba L odpowiada problemowi stopu), a także fakt, że zbiór liczb nieobliczalnych ma moc *continuum*, nasuwa się wniosek, że problemów nieobliczalnych w sensie Turinga jest nieskończenie wiele, a ponadto, że jest ich znacznie więcej niż obliczalnych (których zbiór, podobnie jak zbiór liczb obliczalnych, ma moc *aleph zero*). Jest to wniosek, a nie przypuszczenie, ponieważ każdej liczbie nieobliczalnej odpowiada co najmniej jeden problem nierozwiązywalny, polegający na wyznaczaniu dowolnie długiego fragmentu jej cyfrowego przedstawienia.

Można oczywiście utrzymywać, że nieskończone continuum problemów cyfrowo nieobliczalnych mieści w sobie stosunkowo niewielką liczbę zagadnień praktycznie istotnych. Na przykład, nawet problem stopu – jako dotyczący wszelkich maszyn Turinga, a nie tylko jakiegoś ich wyróżnionego podzbioru – można uznawać za zbyt szeroki, a tym samym za mało znaczący z praktycznego punktu widzenia. Skrajnie praktyczny punkt widzenia wydaje się jednak złudny. Trudno bowiem o pewność, że rozwiązania problemów niemających bezpośredniego przełożenia na zastosowania nie kryją w sobie doniosłych praktycznie konsekwencji (których na danym etapie rozwoju nauki i techniki nie znamy)[26].

[26] Aby uzasadnić przekonanie o praktycznej doniosłości wszelkich problemów nieobliczalnych, można powołać się na nieco karkołomne, ale jednak sugestywne rozumowanie przez analogię. Otóż podobnie jak w zbiorze liczb rzeczywistych nie można pominąć (bez uszczerbku dla ich matematycznej użyteczności) liczb nieobliczalnych (bo ich istnienie zapewnia zbiorowi R własność ciągłości), tak w zbiorze wszelkich problemów nie można pominąć zbioru problemów nieobliczalnych. Wy-

Przed przejściem do kolejnego rozdziału, poświęconego technikom alternatywnym względem obliczeń Turingowskich, warto zwrócić uwagę na jedną jeszcze cechę liczb nieobliczalnych. Otóż w stosunku do zbioru liczb osiągalnych dla maszyn Turinga, czyli obliczalnych, są one wielkościami, które wykraczając poza ten zbiór, pozwalają „rozbudować" go do postaci zbioru liczb rzeczywistych. To zaś nasuwa myśl, że mogą istnieć takie techniki informatyczne, które odwołują się do teorii liczb rzeczywistych (a idąc dalej: do pewnych wyników analizy matematycznej), ponadto zaś, w warstwie implementacyjnej pozwalają, operować na fizycznych odpowiednikach niektórych lub wszystkich liczb rzeczywistych. Możliwości istnienia takich technik przyjrzymy się w rozdziale kolejnym.

4. Czy mogą istnieć efektywnie realizowalne kody niecyfrowe?

Ze względu na właściwości komputerów cyfrowych[27] ogół kodów reprezentujących dane, programy i wyniki działania tych urządzeń podlega pewnym minimalnym ograniczeniom, wyznaczanym w ramach Turingowskiego modelu obliczeń. W gruncie rzeczy ograniczenia te polegają na niemożności „wyjścia" poza zbiór liczb obliczalnych w sensie Turinga.

W związku z powyższym zachodzi pytanie o to, czy istnieją jakiekolwiek maszyny informatyczne, różne od cyfrowych, które byłyby w stanie operować na realnych *kodach nieobliczalnych*, tj. pewnych fizycznych reprezentacjach liczb nieobliczalnych w sensie Turinga. Gdyby maszyny takie faktycznie istniały, mogłyby, po pierwsze, rozwiązywać problemy, których jedyne dostępne rozwiązania ogólne są kodowane za pomocą liczb nieobliczalnych, po drugie zaś, mogłyby generować wyniki będące takimi liczbami (lub reprezentowane za ich pomocą). Moc obliczeniowa tego rodzaju automatów byłaby zatem większa od mocy urządzeń cyfrowych.

Z punktu widzenia czystej teorii maszyny takie istnieją, a ogólne zasady ich działania są określone przez różne modele *hiperobliczeń*

---

wód ten wymagałby dalszego rozwinięcia, dlatego sygnalizujemy go tylko w przypisie.

[27] Przypomnijmy, że chodzi tutaj o obliczeniową równoważność (wyidealizowanych) komputerów cyfrowych i maszyn Turinga.

– nazywanych tak ze względu na właściwy im potencjał poszerzania możliwości maszyny UMT (Copeland, 2002). Należą do nich między innymi: modele infinitystyczne – dopuszczające wykonywanie nieskończonej liczby operacji (obliczeń) w skończonym czasie (Shagrir, 2004); modele niedeterministyczne – opisujące obliczenia inicjowane i/lub kontrolowane losowo (Deutsch, 1985); oraz *analogowe* – pozwalające przetwarzać sygnały ciągłe, opisywane matematycznie za pomocą liczb rzeczywistych z określonego przedziału (Mycka, Piekarz, 2004). Warto podkreślić, że idea kodowania niecyfrowego przejawia się najpełniej w przypadku obliczeń ostatniego typu, tj. analogowych, ponieważ ich teoria daje możliwość operowania na wielkościach (kodach) z całego *continuum* (a nie na konkretnych liczbach nieobliczalnych czy pewnym ich skończonym lub przeliczalnym podzbiorze)[28].

Teoretyczne propozycje obliczeń takiego czy innego typu nie przesądzają oczywiście kwestii ich fizycznej realizowalności. Kwestię tę rozstrzyga negatywnie *hipoteza Churcha-Turinga*, która w jednej z wersji stwierdza, że „funkcja jest efektywnie obliczalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest obliczalna za pomocą uniwersalnej maszyny Turinga" (Harel, 2000, s. 240)[29]. W kontekście kodowania sformułowanie to można interpretować tak, że jedynymi efektywnie przetwarzalnymi kodami są dane akceptowalne i możliwe do wygenerowania przez maszynę UMT, a więc kody cyfrowe (dyskretne). Z tej perspektywy zatem wszelkie kody, niezależnie od ich opisu teoretycznego, są praktycznie redukowalne do kodów cyfrowych – co polega między innymi na tym, że zawsze istnieje możliwość ich dowolnie dokładnego przybliżenia za pomocą odpowiedników cyfrowych. Zważywszy na fakt, że model UMT ma charakter teoretyczny i określa bardziej ograniczenia obliczeń niż ich realne możliwości, konkluzję przywołanej hipotezy można ująć jeszcze inaczej. Otóż model UMT wyznacza absolutnie minimalne ograniczenia kodowania w informatyce[30]. Innymi słowy: wszel-

[28] Warto dodać również, że techniki analogowe pozostają najbliższe informatycznej praktyce – tak ze względów historycznych (bo maszyny analogowe konstruowano już w latach 30. XX wieku), jak i z perspektywy współczesnych badań (Mycka, Piekarz, 2004; Shannon, 1941).

[29] Przytoczone sformułowanie traktuję jako hipotezę, ponieważ nie przesądzam tego, czy efektywnie realizowalne fizycznie są wyłącznie obliczenia turingowskie (realizowane w praktyce przez maszyny cyfrowe).

[30] W rozdziale poprzednim, w czwartym akapicie, wyjaśniłem ponadto, że są to minimalne ograniczenia teoretyczne technik cyfrowych.

kie realne obliczenia – niezależnie od teoretycznego modelu, który je opisuje – muszą podlegać ograniczeniom określonym w tym właśnie, maksymalnie bliskim praktyce modelu (tj. UMT). Ograniczenia konstrukcji alternatywnych, np. modeli obliczeń analogowych, są po prostu szersze.

Najpoważniejsze argumenty za prawdziwością tezy Churcha-Turinga, a więc także za istnieniem powyższych ograniczeń, odnoszą do pojęcia n i e s k o ń c z o n o ś c i. Kwestia podstawowa to fakt, że liczby nieobliczalne – odpowiadające rozwiązaniom pewnych problemów – cechuje nieskończoność aktualna. Przypomnijmy, że chodzi tutaj o ich niekończące się, nieregularne i niemożliwe do stopniowego generowania rozwinięcia, które jako nieskończone całości reprezentują (cyfrowo) daną liczbę.

Wyznaczanie takich reprezentacji, a zatem i rozwiązywanie odpowiadających im problemów, musi wymagać posługiwania się istniejącymi w przyrodzie, fizycznymi wielkościami nieobliczalnymi. Osadzenie takich naturalnych nośników nieobliczalności w maszynie jest konieczne, ponieważ wiadomo, że całościowych reprezentacji liczb nieobliczalnych nie daje się kodować ani wyznaczać w sposób tradycyjny, tj. za pomocą minimalnie „angażujących" naturę kodów i operacji binarnych[31]. W szczególności wszelkie efektywne implementacje wspomnianych wyżej technik analogowych wymagają wykorzystywania fizycznych wielkości nieobliczalnych. Wynika to z faktu, że zarówno specyfika, jak i siła tych technik (to znaczy: ich większa moc obliczeniowa od technik cyfrowych) polegają na możliwości przetwarzania i generowania wielkości z pewnego ciągłego *continuum* (Mycka, Piekarz, 2004). To zaś nie byłoby ciągłe, gdyby nie wypełniające je wielkości nieobliczalne[32].

[31] Kody i operacje binarne również muszą być fizycznie zaimplementowane za pomocą takich czy innych wielkości naturalnych (np. impulsów elektrycznych); rzecz jednak w tym, że w ich przypadku wystarczy posługiwać się dowolnymi właściwie wielkościami fizycznymi, które są łatwo rozróżnialne (albo nawet jedną rozpoznawalną wielkością i jej brakiem). Stopień „zaangażowania" natury jest więc w ich przypadku minimalny.

[32] Ten sam fakt można wyrazić, odnosząc się do własności liczb rzeczywistych, które stanowią matematyczny odpowiednik przetwarzanych analogowo sygnałów ciągłych. Otóż bez liczb nieobliczalnych każdy przedział liczb rzeczywistych (odpowiednik fizycznej dziedziny sygnałów analogowych) ma moc *alef zero*, a więc jest równoliczny z dyskretnym zbiorem liczb naturalnych.

Powstaje zatem realny problem istnienia nośników nieobliczalności w przyrodzie. Przypomnijmy, że ich najbardziej problematyczna cecha to mająca im przysługiwać fizycznie, zgodnie jednak z teoretycznymi własnościami liczb nieobliczalnych, nieskończoność aktualna[33]. Gdyby nośniki takie istniały, zbiór możliwych do praktycznego wykorzystania informatycznych kodów wykraczałby poza zbiór kodów cyfrowych. Obejmowałby on takie kody, które mają bezpośrednie umocowanie w naturze. Ich niektóre przynajmniej składniki byłyby po prostu „wywołaniami" zjawisk naturalnych, które zwracałyby wprost i całościowo pewne wielkości nieobliczalne. W szczególności zainicjowana przez Claude'a Shannona teoria obliczeń analogowych-ciągłych (Shannon, 1941) przewiduje, że w skład złożonego kodu analogowego mogą wchodzić elementarne operacje całkowania, których ciągłe wyniki (realizowane w czasie rzeczywistym) muszą być uzyskiwane w drodze pomiaru zjawisk zachodzących w specjalnych układach fizycznych (np. elektronicznych integratorach). A jak już pisałem wyżej, dla ciągłości zbioru wyników jest niezbędne, aby zawierały się w nim wielkości nieobliczalne.

Istnienie zjawisk przyrodniczych o charakterze *nieobliczalnym* – to znaczy takich, które nie dają się opisać w kategoriach liczb obliczalnych i funkcji realizowalnych przez maszyny Turinga – postulują pewne teorie fizyczne. Jeden ze szczególnie często cytowanych przykładów pochodzi z pracy Pour-El i Richardsa (1989). Zgodnie z nim opisana pewnym równaniem różniczkowym fala trójwymiarowa może uzyskiwać stany wyrażalne tylko za pomocą liczb nieobliczalnych. Do tej samej kategorii należą propozycje Johna Doyle'a, które wskazują na niemożność opisu występujących w przyrodzie procesów osiągania równowagi (np. termodynamicznej) za pomocą funkcji obliczalnych (Copeland, 2002, s. 470). Te i inne przykłady zdają się wskazywać na realne istnienie zjawisk, które moglibyśmy traktować jako naturalne nośniki nieobliczalności. Pamiętajmy jednak, że za zgodność teorii fizycznych z rzeczywistością odpowiadają testy empiryczne, których żadna skończona liczba (znowu problem z nieskończonością!) nigdy ze stuprocentową pewnością nie pozwoli stwierdzić.

[33] Doniosłą filozoficznie argumentację za istnieniem wielkości aktualnie nieskończonych w przyrodzie zawiera opracowanie *Amor Infiniti. Jakie doń prowadza intuicje filozoficzne?* (Marciszewski, 2012).

Załóżmy jednak, niezależnie od powyższej obiekcji natury epistemologicznej, że fizyczne nośniki kodów nieobliczalnych istnieją i można ich używać w ramach takich czy innych obliczeń naturalnych[34]. Mimo takiego założenia pojawia się kolejny problem, dotyczący możliwości *odczytu*, a więc poznania uzyskanego wyniku. Problem polega na tym, że dla poznania wyniku konieczna jest nieskończona dokładność odczytu całej wielkości nieobliczalnej[35]. Jest ona niezbędna, ponieważ dokładność skończona, która charakteryzuje przecież wszelkie realne instrumenty pomiarowe, sprowadziłaby pożądaną w danej sytuacji liczbę nieobliczalną do poziomu skończonej wielkości obliczalnej. Utracilibyśmy zatem oczekiwany efekt przezwyciężenia ograniczeń obliczeń cyfrowych. Można wprawdzie argumentować, że w przypadku niektórych problemów wystarczy, aby wielkości nieobliczalne były po prostu przetwarzane, a nie odczytywane – bo rozwiązaniem problemu jest jakaś konkretna skończona wartość, którą można odczytać (Stannett, 2003, s. 121–123). W rozważanym tu ujęciu chodzi jednak o znajomość ogólnego rozwiązania problemu (funkcji wiążącej wszelkie możliwe dane wejściowe z odpowiadającymi im wynikami), a tego typu rozwiązanie koduje cała liczba nieobliczalna o nieskończonym aktualnie rozwinięciu. Problem epistemiczny zatem pozostaje: bez nieskończonej dokładności odczytu rozwiązania takiego nie możemy poznać.

Konkludując: przysługująca liczbom nieobliczalnym nieskończoność aktualna sprawia, że sugerowane przez tezę Churcha-Turinga ograniczenia technik obliczeniowych – technik, które wymagają fizycznej implementacji określonych informatycznych kodów – można przezwyciężyć pod dwoma co najmniej warunkami: 1) występowanie w przyrodzie wielkości nieskończonych aktualnie, które ponadto możemy rejestrować i przetwarzać, 2) istnienie umysłowej dys-

[34] Mam tutaj na myśli obliczenia projektowane przez człowieka, lecz angażujące w istotny sposób substraty i/lub procesy naturalne (np. obliczenia kwantowe lub dokonywane za pomocą molekuł DNA). Do klasy obliczeń naturalnych w szerszym sensie zalicza się ponadto: 1) obliczenia inspirowane obserwacją natury (np. realizowane przez sztuczne sieci neuronowe) oraz 2) procesy występujące w przyrodzie, opisywane w kategoriach obliczeniowych (np. procesy wewnątrz-mózgowe) (Kari, Rozenberg, 2008; Rozenberg, Back, Kok, 2012).

[35] Dokładność taka jest konieczna w przypadku technik analogowych, które z definicji operują na wielkościach ciągłych (dwie wielkości z dziedziny ciągłej mogą różnić się od siebie dowolnie mało).

pozycji do wglądu w obiekty nieskończone aktualnie oraz dotyczące ich relacje i metody (np. metody definiowania). Warunek drugi trzeba uznać za spełniony – o czym świadczą tworzone przez ludzi teorie nieskończoności aktualnej, w tym teoretyczne modele obliczeń na wielkościach nieskończonych aktualnie. Możliwość spełnienia warunku pierwszego wydaje się co najmniej problematyczna.

BIBLIOGRAFIA

Angius, N., Turner, R. (2017). Philosophy of Computer Science. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, pobrane z: https://plato.stanford.edu/entries/computer-science/

Chaitin, G. J. (1993). Randomness in Arithmetic and the Decline and Fall of Reductionism in Pure Mathematics. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, *50*, 314–328.

Chaitin, G. J. (1998). *The Limits of Mathematics*. Singapore: Springer.

Chaitin, G. J. (2005). Omega and Why Maths Has No TOEs. Pobrane z: https://plus.maths.org/content/os/issue37/features/omega/

Colburn, T. R. (2000). *Philosophy and Computer Science*. Armonk, NY: M.E. Sharpe.

Copeland, J. (2002). Hypercomputation. *Mind and Machines*, *12*(4), 461–502.

Deutsch, D. (1985). Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer. *Proceedings of The Royal Society of London A*, *400*, 97–117.

Etesi, G., Nemeti, I. (2002). Non-Turing Computations via Malament-Hogarth Space-Times. *International Journal of Theoretic Physics*, *41*(2), 341–370.

Gödel, K. (1995/2018). O pewnych zasadniczych twierdzeniach dotyczących podstaw matematyki i wnioskach z nich płynących. *Studia Semiotyczne*, *32*(2), 9–32.

Harel, D. (2000). *Rzecz o istocie informatyki. Algorytmika*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Kari, L., Rozenberg, G. (2008). The Many Facets of Natural Computing, *Communications of the ACM*, *51*(10), 72–83.

Krajewski, S. (2014). Neopitagoreizm współczesny: uwagi o żywotności pitagoreizmu. W: M. Heller, S. Krajewski (red.), *Czy fizyka i matematyka to nauki humanistyczne?* (s. 348–366). Kraków: Copernicus Center Press.

Leibniz, G. W. (1890). *Philosophische Schriften* (t. VII). Berlin: Weidmann.

Marciszewski, W. (2012). Amor Infiniti. Jakie doń prowadzą intuicje filozoficzne? Pobrane z: http://marciszewski.eu/?p=2955

Marciszewski, W., Stacewicz, P. (2011). *Umysł-Komputer-Świat. O zagadce umysłu z informatycznego punktu widzenia*. Warszawa: Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT.

Moor, J. H. (1978). Three Myths of Computer Science, *The British Journal for the Philosophy of Science*, *29*(3), 213–222.

Murawski, R. (2014). Nieskończoność w matematyce. Zmagania z potrzebnym, acz kłopotliwym pojęciem. *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, *55*(2), 5–42.

Mycka, J. M., Piekarz, M. (2004). Przegląd zagadnień obliczalności analogowej. W: S. Grzegórski, M. Miłosz, P. Muryjas (red.), *Algorytmy, metody i programy naukowe* (s. 125–132). Lublin: Polskie Towarzystwo Informatyczne.

Mycka, J. M., Olszewski A. (2015). Czy teza Churcha ma jeszcze jakieś znaczenie dla informatyki? W: P. Stacewicz (red.), *Informatyka a filozofia. Od informatyki i jej zastosowań do światopoglądu informatycznego* (s. 53–74). Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.

Ord, T. (2002). Hypercomputation: Computing More Than the Turing Machine. Pobrane z: https://arxiv.org/ftp/math/papers/0209/0209332.pdf

Ord, T. (2006). The many forms of hypercomputation. *Applied Mathematics and Computation*, *178*(1), 8–24.

Pour-El, M. B., Richards, J. I. (1989). *Computability in Analysis and Physics*. Berlin: Springer.

Rozenberg, G., Back, T., Kok, J. N. (2012). *Handbook of Natural Computing*. Berlin-Heidelberg: Springer.

Rubel, L. (1993). The Extended Analog Computer. *Advances in Applied Mathematics*, *14*(1), 39–50.

Shagrir, O. (2004). Super-Tasks, Accelerating Turing Machines and Uncomputability. *Theoretical Computer Science*, *317*(1-3), 105–114.

Shannon, C. (1941). Mathematical Theory of the Differential Analyzer. *Journal of Mathematics and Physics*. *20*(1-4), 337–354.

Stacewicz, P. (2012). Co łączy umysł z teorią liczb? *Filozofia Nauki*, *79*(3), 111–126.

Stacewicz. P. (2015). Informatyczne kłopoty z nieskończonością. W: R. Murawski (red.), *Filozofia matematyki i informatyki* (s. 310–327). Kraków: Copernicus Center Press.

Stacewicz, P. (2018a). Czy informatykom musi wystarczyć nieskończoność potencjalna? W: R. Murawski, J. Woleński (red.), *Problemy filozofii matematyki i informatyki* (s. 177–190). Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Stacewicz, P. (2018b). O teoretycznej (nie)zbędności kategorii liczby w informatyce i jej metodologii. Pobrane z: http://marciszewski.eu/?p=9995

Stannett, M. (2003). Computation and Hypercomputation. *Minds and Machines*, *13*(1), 115–153.

Trzęsicki, K. (2006). From the Idea of Decidability to the Number Omega. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, *22*(1), 73–142.

Trzęsicki, K. (2006). Leibnizjańskie inspiracje informatyki. *Filozofia Nauki*, *55*(3), 21–48.

Turing, A. M. (1936). On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *s2-42*(1), 230–265.

UNCOMPUTABLE NUMBERS AND THE LIMITS OF CODING IN COMPUTER SCIENCE

SUMMARY: The description of data and computer programs with the use of numbers is epistemologically valuable, because it allows the definition of the limits of different types of computations. This applies in particular to discrete (digital) computations, which can be described by means of computable numbers in the Turing sense. The mathematical fact that there are other types of real numbers, i.e. uncomputable numbers, determines the minimal limitations of digital techniques; on the other hand, however, it points to the possibility of theoretical development and physical implementation of computationally stronger techniques, such as analogue-continuous computations. Analyses presented in this article lead to the conclusion that physical implementations of unconventional (non-digital) computations require the occurrence of actually infinite entities in nature. Although some arguments of theoretical physics support the physical existence of such entities, they are not definitive.

Key words: numerical coding, computable numbers, uncomputable numbers, Turing machine, digital computations, analogue computations, infinity.

Studia Semiotyczne, t. XXXII, nr 2 (2018), s. 153–185
ISSN 0137-6608, e-ISSN 2544-073X
DOI: 10.26333/sts.xxxii2.09
Projekty i dyskusje

Witold Marciszewski*

DOES SCIENCE PROGRESS TOWARDS EVER HIGHER SOLVABILITY THROUGH FEEDBACKS BETWEEN INSIGHTS AND ROUTINES?

Summary: The affirmative answer to the title question is justified in two ways: logical and empirical. (1) The logical justification is due to Gödel's discovery (1931) that in any axiomatic formalized theory, having at least the expressive power of PA (Peano Arithmetic), at any stage of development there must appear unsolvable problems. However, some of them become solvable in a further development of the theory in question, owing to subsequent investigations. These lead to new concepts, expressed with additional axioms or rules. Owing to the so-amplified axiomatic basis, new routine procedures like algorithms, can be reached. Those, in turn, help to gain new insights which lead to still more powerful axioms, and consequently again to ampler algorithmic resources. Thus scientific progress proceeds to an ever higher scope of solvability. (2) The existence of such feedback cycles – in a formal way rendered with Turing's systems of logic based on ordinal (1939) – gets empirically supported by the history of mathematics and other exact sciences. An instructive instance of such a process is found in the history of the number zero. Without that insight due to some ancient Hindu mathematicians there could not arise such an axiomatic theory as PA. It defines the algorithms of arithmetical operations, which in turn help intuitions; those, in turn, give rise to algorithmic routines, not available in any of the previous phases of the process in question. While the logical substantiation of the point of this essay is a well-established result of logico-semantic inquiries, its empirical

* Foundation for Computer Science, Logic and Mathematics, Warsaw (Board Member, Editor of Foundation's scientific site http:/calculemus.org). E-mail: witmar@calculemus.org. ORCID: 0000-0003-3384-5782.

claim, based on historical evidences, remains open for discussion. Hence the author's intention to address philosophers and historians of science, and to encourage their critical responses.

KEY WORDS: Algorithm, arithmetic, axiom, axiomatic formalized theory, concept, decidability, feedback, insight (intuition), mathematics, mechanism, mentalism, oracle, problem, problem-solving, progress, routine procedure, science, solvability.

INTRODUCTION: ON THE DEBATE BETWEEN EXTREME MECHANISM AND BALANCED MENTALISM

Albert Einstein is reported to have once said: "if you gave me an hour to solve a problem, I would use the first 55 minutes to consider if it is the right problem."

0.1. The existence of the hot debate of a problem as a warrant of its non-triviality

Does this essay's title express the right problem? The anecdote does not say what criteria of being the right problem Einstein might have in mind. However, it does not seem risky to assume the following conditions. (1) The solution is not trivial, i.e., it requires research. (2) The problem in question is likely to be solved with the available means of research.

That our title question is not trivial is evident from its being the focus of the unsettled debate between two opposing approaches to Artificial Intelligence systems.

One of them claims the following. An AI system is able to imitate natural human intelligence, as in some important cases it produces identical solutions, but in a way essentially different from that characteristic of the human mind. To wit, AI systems proceed in a purely routine way, while the typically human process of problem-solving consists in mutual interactions between creative insights and programmed routines. This approach deserves to be named *balanced mentalism*, as focussing on a balance between mental insights and robot-like routines. Insights, that is, creative conceptualizations, are the source of routines, and those, in turn, facilitate new creative conceptualizations (cp. **5.2**).

To evidence such a feedback, as well as the nature of conceptual creativity, let us consider the discovery of the number zero by Hindu mathematicians, more than a thousand years ago. The creation of this concept was a deep and penetrative insight into the realm of arithmetic, leading to the positional notation of numbers. This story nicely exemplifies the *feedback* between insights and routines, that is, mechanical procedures in performing various tasks: in particular, problem-solving. Owing to the positional notation based on zero, it was possible to create algorithms for arithmetical operations: addition, multiplication, etc.; a special role is played by binary notation, necessary for the functioning of digital electronic computers.

According to the opposite approach, the way of producing a requested solution is exactly like that in the case of natural human intelligence. To wit, in both cases the process of problem-solving is a mechanical (i.e., algorithmic) routine. Humans are proud of their creativity, but in fact that alleged creativity is a mechanical process, whose mechanism is still unknown. However, it should be discovered owing to future, more advanced, inquiries into the enormous complexity of the human brain. Let this approach be called *extreme mechanism*.

The said adjectives will be, for brevity, omitted in what follows, if not needed in the given context. Now we have a hint that our title question is not trivial, since it reflects a real mind-philosophical controversy between mentalism and mechanism.

To define both options in more detail, let us notice the following. Mechanism is the claim that (i) the human mind is identical with the human brain, and (ii) the latter is equivalent to the Universal Turing Machine (UMT) as defined in Turing's study (1936). In both cases – it is assumed – any successful problem solving is an algorithmic procedure; it is convenient to call it a *routine*. The extremity of this kind of mechanism consists in its being extremely categorical; the adjective stresses the fact that followers of mechanism regard their view as unreservedly rational and scientific, and without any compromise with mentalism.

Mentalism claims that at least one member of the above conjunction has to be false. This follows from the fact that the extent of fitting and fruitful solutions produced by the human mind is essentially ampler than that possible to UMT. Mentalism would be extreme if asserted that mental acts alone suffice to solve logical and mathematical problems, without any need of resorting to routines, i.e., purely mechanical procedures; the admittance of such procedures makes it a moderate approach.

0.2. On the odds that the mechanism-mentalism contention can be solved in the present state of science

Let us dwell a while on the second feature of the right problem, that of solvability: the problem in question should be likely to be solved with the available means of research. This postulate is relevant to the argumentative strategy adopted in this essay. The essay is meant as a contribution to the controversy between mechanism and mentalism, a contribution based on some metamathematical results. In this respect it is like Webb's book (1980) which bears the informative title *Mechanism, Mentalism, and Metamathematics*. I make use of the same terms to express the opposite stance, to wit, the balanced mentalism.

It is not possible to present Webb's extensive argumentation, and offer convincing counterarguments, within the size limits of the present paper. Instead, I focus on some possible philosophical and semantical foundations of mechanism which preceded in time the metamathematical problems and results of Hilbert (1928), Gödel (1931, 1936), and Turing (1936, 1939).

Moreover, I regard it as pertinent to preserve a kind of symmetry, to wit, to consider as an opponent of mentalism somebody as renowned and influential as the three mentioned authors, and, like them, engaged in the issues of philosophy of mathematics and logic, philosophy of mind, and semantics.

Having this in mind, the best possible choice seems to be Ludwig Wittgenstein as the author of *Tractatus Logico-Philosophicus* (1922) considered in the context of related views, such as Russell's logical atomism and the Vienna Circles project of unified science (supported by mechanist assumptions).

The sequence of discussion is motivated by the fact that Gödel's balanced mentalism, corresponding in a way with Hilbert's and Turing's problems, requires a more extensive presentation than the aphoristic utterances of Wittgenstein. With the conceptual apparatus of Gödel and Turing, e.g. the concept of decidability, it is easier to interpret some of Wittgenstein's maxims which, without such an aid, sound rather mysterious.

It is in order to briefly explain the title phrase "ever higher solvability". It is to mean the following. Within a definite period of time, at every stage of scientific development the means and methods of problem-solving become more numerous and exact than at any preceding stage. The proviso "within a definite period of time" follows from our knowledge about some past periods. For instance, in physics, the beginning of the period of increasing solvability may be dated only after the entrance on the scene of history of Copernicus and Galileo. In logic, the intense increase of solvability starts from the axiomatic and formalized system of logic rendered in a precise symbolic language by Frege (1879).

The notion of higher solvability can be applied as well to the solvability of the contention between mechanism and mentalism. According to the present author, after Gödel's and Turing's discoveries, the degree of solvability is higher than in the period of Wittgenstein, and proves to be in favour of balanced mentalism. However, there are authors who claim that recent results in Artificial Intelligence, neurology, robotics, etc. yield evidence in favour of mechanism, even the extreme. Weak points, if there are any, in Wittgenstein's mechanist stance, do not seem to them relevant in the present advanced state of scientific knowledge. If they are ready to defend mechanism on that or another basis, such a rejoinder will be welcomed by the present defender of balanced mentalism.

1. Gödel's dynamic vision of ever advancing frontiers of solvability

1.1. Gödel's incompleteness theorem in the light of the opposition: "frontier" vs "limit"

There is in English a suggestive distinction between the concepts of *frontier* and *limit*. Though fairly subtle, it is thought-provoking, and crucial for the present discussion. To realize its role, let us look into dictionaries.

Limit: the point, edge, or line beyond which something ends, may not go, or is not allowed.
Frontier: 1. A region just beyond or at the edge of a settled area. 2. An unexploited so far area for discovery or research.

In the latter definition, the second meaning belongs to the vocabulary of academic communities, while the first, which gave origin to the second, is taken from the idiom of the American pioneers. These with their drive, bravely overcame the limits of their hitherto exploited lands, pushing the frontiers of their estates more and more to the West.

This linguistic phenomenon in English lexis helps us to more precisely render the philosophical significance of Gödel's incompleteness theorem. People are accustomed to saying that Gödel discovered the *limits* of solvability of mathematical theories; but, instead, it should be said that he discovered the *frontiers* of solvability. That is to say, he drew the critical line to mark a limit of algorithmic procedures, and devised the strategy of its overcoming in the march towards new lands of mathematical truths.

New entities are first grasped through wordless insights, then named, and defined in axiomatic manner. If the theory in question is not only axiomatized (like Euclid's geometry), but also formalized (like Hilbert's geometry), then we can obtain algorithms for automated proving (provers) and for automated checking of handmade proofs (checkers).

As new concepts are introduced into a theory, and then axiomatized and formalized, the scope of its algorithmic solvability becomes ampler. Gödel (1936) gave a classic example of such a process. His approach consists in considering an infinite sequence of arithmetical theories – such that for every theory there is a theory having a greater scope of solvability, due to some conceptual innovations, to wit, introducing more and more abstract concepts of set.

Before addressing this approach in greater detail, it is in order to consider the method of attaining new concepts. It is the attainment which does not need any resort to the concepts which already exist in the given theory.

In the following subsection **1.2**, after mentioning the axiomatic method of introducing new ideas, we are to deal with the axiom of comprehension to introduce the notion of *abstract set*. This concept is presupposed in Gödel's example of amplifying the range of solvability, and pushing the frontiers of mathematics. This is why we ought to devote special attention to that formula.

1.2. On the idea of set as introduced by the axiom of comprehension

There is a key difference between introducing new expressions and introducing new concepts. The former is not bound to create a conceptual novelty; a new expression may express with new words an old concept, one that already exists in our language. In such a case, we introduce the new expression for the sake of convenience, as shorter, having desirable associations, etc. Such a job is done by *normal definitions*. They should satisfy the conditions of eliminability and of non-creativity; this implies that there is no increase in the amount of information.

In order to introduce a new concept, i.e., one carrying new information, and so giving us a chance of solving problems hitherto insolvable, we use *meaning postulates*. These are creative, to enable answering questions, hitherto unanswerable. There are two kinds of meaning postulates: operational definitions in empirical theories, and axiomatic definitions in deductive theories.[1]

At the very start of the discourse on sets, it is in order to explain that the term *set* will be here used interchangeably with *class*, as meaning exactly the same. In some systems of set theory these two forms are employed to distinguish two kinds of multitudes. That practice is justified by some theoretical needs, but in the present discussion such sophistication is not needed; the use of one or the other name will be motivated purely by stylistic convenience.

The formula to introduce the concept of set is standardly called the axiom of *comprehension*. Some other names are also in use. Among them *axiom of abstraction*. This is even more telling than the standard term, since it defines the abstract concept of set, and occurs in the phrases "abstraction class" and "definition by abstraction". However, to make referring to literature easier, I am to follow the standard version, la-

[1] More on this subject: Marciszewski (1981), see especially "Definition" pp. 86–96, Sections 2.2ff, 4.3 and 5.3.

belling it "UC" for "Unrestricted Comprehension" (the sense of the adjective – explained below).

The axiom reads: *There exists a set y whose members (represented by x) are precisely those objects that satisfy the condition φ.*

Strictly speaking, it is not a concrete single axiom, but what is called "axiom schema" since φ represents infinitely many formulas which could be substituted for this variable. In symbols the axiom reads as follows:

UC: $\forall x \exists y\ (x \in y \Leftrightarrow \varphi(x))$

The set whose existence is so postulated is named an *abstraction class*. In logical notation it reads $\{x\text{: } \varphi(x)\}$ to mean: the class of entities which satisfy the condition $\varphi(x)$.

UC was used, in the early days of mathematical logic, as the basis of "naive" set theory, that is, the one being developed before a strict axiomatization has been devised. This formula should be used cautiously since in some substitutions for φ it leads to Russell's paradox. To avoid that antinomy, relevant restrictions have been added. In that restricted form the axiom entered the axiomatic set theory of Zermelo and Fraenkel, labelled ZF, or ZFC ("C" for axiom of Choice, if added to ZF).

In order to distinguish the original simple version from that restricted one adopted in ZFC, the former has been called the "unrestricted comprehension axiom". In the present discourse those restrictions are not necessary, hence it is UC which will be referred to.[2]

1.3. The increase of the scope of solvability owing to the axiom of comprehension

The axiom schema UC can produce an infinite sequence of sets of ever higher order. The greater the order of a language, the higher the degree of solvability possessed by theories expressible in that language.

---

[2] See https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_schema_of_specification. This article is an extensive account on the forms and history of this axiom. There is in it the thought-provoking remark that the remaining ZFC axioms became necessary to make up for some of what was lost by changing the axiom schema of unrestricted comprehension into the restricted one (called also the axiom of specification).

The order of a set, likewise the order of the respective language, is characterized as follows.

Let x range over individuals, labelled as entities of order zero, and y range over sets-of-individuals, hence entities of order one.

$$\mathbf{UC_1}\text{:}\ \forall x \exists y\ (x \in y \Leftrightarrow \varphi(x))$$

Now, let x range over sets-of-individuals (entities of order one), and y over classes-of-sets-of-individuals, these classes being entities of order two.

$$\mathbf{UC_2}\text{:}\ \forall x \exists y\ (x \in y \Leftrightarrow \psi(x))$$

Next comes $\mathbf{UC_3}$ to define sets of the third order: the class-of-classes-of-sets-of-individuals. And so on, up to infinity.

The notion of set as defined by $\mathbf{UC_1}$ is a conceptual innovation with respect to the notion of an *individual*. Another notion of set, that defined by $\mathbf{UC_2}$ is a conceptual innovation with respect to the notion of a *set of individuals*, etc., so we deal with an infinity of conceptual innovations.

This results in another infinity of conceptual innovations, to wit, infinitely many concepts of the quantifier. The symbol $\forall x$ when in $\mathbf{UC_1}$ it ranges over individuals means something other than in the case of ranging over sets of individuals, as in $\mathbf{UC_2}$. And so on.

Such an ordering of sets and quantifiers determines the order of languages. The sentence "this is my pair of shoes" belongs to second-order English, for the term "pair" denotes a set. The saying "in this store we have a set of 100 pairs of black shoes" belongs to third-order English.[3]

The language of a logical theory which contains only the quantifiers of first order, is said to be the first-order language. In the case of quantifiers of at most second order, we are dealing with a second-order language, and so on.

[3] This should be considered by nominalists who try to discourage us from any confidence in set theory; let they try to get rid of higher-order phrases in ordinary languages.

Thus, being familiar with the infinite ladder of orders, we are ready to appreciate the significance of Gödel's statement in his *communiqué* *Über die Länge von Beweisen* (1936), that is, *On the length of proofs*. The main point runs as follows (translated from the German):

> Thus, passing to the logic of the next higher order has the effect, not only of making provable certain propositions that were not provable before, but also of making it possible to shorten, by an extraordinary amount, infinitely many of the proofs already available (Gödel, 1986, p. 397).

This assertion was neither demonstrated nor exemplified by Gödel himself. This was done by other authors some years later.[4]

1.4. The endless evolution of mathematics having its source in the inexhaustibility of the world of sets (Gibbs Lecture)

The unbounded openness of mathematical language, exemplified by Gödel (1936) with the case of number theory, was considered by him more extensively a dozen years later in the famous *Gibbs Lecture*. In this case, the idea of infinite sequences of axiomatic systems, was extended onto the problem of axiomatizing set theory.

> If one attacks this problem, the result is quite different from what one would have expected. Instead of ending up with a finite number of axioms, as in geometry, one is faced with an infinite series of axioms, which can be extended further and further, without any end and, apparently, without any possibility of composing all these axioms in a finite rule producing them. You will realize, I think, that we are still not at the end, nor can there ever be an end to this procedure of forming the axioms, because the very formulation of the axioms up to a certain stage gives rise to the next axiom (Gödel, 1995, pp. 306–7).

The existence of such infinite chains of axiomatic systems, considered both in the paper (1936) and in the Gibbs Lecture, Gödel inferred from the *principle of inexhaustibility of objective mathematics*. And that, in turn, he conceived as a consequence of his incompleteness theorem. It entails the existence of an infinite domain of mathematical facts which cannot be matched by the set of axioms at any stage

[4] S. R. Buss (1994) produced a detailed proof, while George Boolos offered a nice exemplification in the seminal study *A Curious Inference* (1987). A comment on Boolos's contribution in found in Marciszewski (2006).

of development of mathematical knowledge, called by him *subjective mathematics*.

It should be noted that there is a difference between the endless producing of new axioms in set theory and in number theory. Let us consider Gödel's saying about set-theoretical axioms, that they grow to infinity "apparently, without any possibility of composing all these axioms in a finite rule producing them" (see the quotation above).

In the case of number theory, as treated by Gödel (1936), there is an obvious way of obtaining new systems of axioms: to add quantifiers of the next higher order to those already existing. This is a simple finite rule of producing an ordered sequence converging to infinity.

This makes a difference from set theory as to the kind and degree of conceptual inventiveness. In the case of order degrees in number theory, it is enough to have an intuition concerning the existence of set orders, as entailed by the axiom schema of comprehension. This intuition gives rise to the rule of obtaining new axioms of ever higher order. These new ones are, in a sense, not innovative: each next element of the sequence is new, but produced according to the same general instruction.

With the theory of sets – says Gödel – it is different. Any progress in winning its more powerful axiomatization requires a new insight. For instance, Gödel hoped that in the future indubitable axioms would be found to decide the continuum hypothesis, owing to the deeper intuitions likely to arise in the meantime.

However, inventive insights are no infallible revelations. In the progress of science it is necessary to make steps forward, but not always are they steps in the intended direction. If not, a step backwards may prove necessary in order to look for a better solution: even in mathematics, as was emphasized by Gödel in the question about the possible future fate of the continuum hypothesis.

Such a vision of science – sometimes erring, never ending, and ever marching forward – is characteristic of our current philosophy of science. To get a deeper understanding of this new landscape, let us have a look into a time in which the nature of science was conceived in a way deeply different from that of ours.

2. The farewell of modern science to the models of omniscient daemons

2.1. A kinship between the daemons of Laplace and Hilbert. The rise and fall of their careers

Everybody must have heard of the daemon imagined by Pierre Laplace (1749–1827), while nobody speaks of a similar entity considered by David Hilbert (1862–1943). Nevertheless, Hilbert's daemon does exist as a hypothetical imaginary being. These two daemons are alike in their rise and fall.[5]

Laplace's determinism in physics is personified by the omniscient daemon. Suppose, he knows the precise location, momentum and history of every atom in the universe. Then he can compute, on the basis of classical mechanics, the past and the future of the whole universe.

Hilbert entertained the notion of a universal algorithm solving computationally any mathematical problem encountered, thus being like an omniscient daemon in the universe of mathematics. The very term "compute" hints at the kinship of the said concepts. In some recent publications, e.g., in Rukavicka's (2014) paper, one disproves Laplace's demon using Turing machines. Turing, on the same basis (an abstract machine), refuted Hilbert's programme. No wonder, since what both daemons have in common, is cognitive maximalism: each of them can solve each problem concerning his universe: the physical universe in Laplaces's case, and the mathematical in Hilbert's. Here is Laplace's statement about his daemon's problem-solving power.[6]

> We may regard the present state of the universe as the effect of its past and the cause of its future. An intellect which at a certain moment would know all forces that set nature in motion, and all positions of all items of which nature is composed, if this intellect were also vast enough to submit these data to analysis, it would embrace in a single formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the tiniest atom; for such an intellect nothing would be uncertain and the future just like the past would be present before its eyes (Laplace, 1951, p. 4).

[5] The idea of telling the history of science in terms of daemons is borrowed from Webb (1980).

[6] The quotation which follows is taken from the Wikipedia article "Laplace's demon".

Hilbert's daemon is to be understood as a perfect, infallible mind which is omniscient in the realm of mathematics. This philosophical description is equivalent to the technical formulation of what Hilbert called *Entscheidungsproblem*. It runs as follows:

> **[A]** The decision problem gets solved if one knows a procedure which for a given logical expression allows one to decide, with finitely many steps, about its validity or its satisfiability.
>
> **[B]** The solution of this decision problem has a fundamental impact for all those theories whose statements are capable of being logically derived from finitely many axioms (Hilbert, Ackermann, 1928, p. 73).[7]

The phrase "capable of being logically derived from finitely many axioms" means: *solvable by a mechanical procedure with the use a formalized system of predicate logic*, e.g. the system devised by Hilbert and Ackermann in their textbook. Hence, no intellectual insight, no conceptual inventiveness, is needed. An insight may come or not, while the algorithm in question would always be at hand to bring forth the needed infallible solution.

These two visions of cognitive maximalism, Laplace's and Hilbert's, were anticipated by Leibniz. With Leibniz this vision included the computational solvability even of metaphysical and theological questions. Such an excessive optimism must have proved unrealistic, nevertheless it has been very fertile. Frege's ingenious system of logic was inspired by Leibniz's visions and projects, such as those in his famous text:

> If this is done [i.e., an ideal algorithmic language is devised], whenever controversies arise, there will be no more need for arguing among two philosophers than among two mathematicians. For it will suffice to take the pens into the hand and to sit down by the abacus, saying to each other (and if they wish also to a friend called for help): Let us calculate! (Lenzen, 2004, p. 1)[8].

[7] Translated from German and divided into parts by W. M.

[8] Here is the Latin original of 1684 (cf. Gerhardt, 1890, p. 200), translated by Lenzen (2004, p. 1): "Quo facto, quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duos philosophos, quam inter duos Computistas. Sufficiet enim calamos in manus sumere sedereque ad abacos, et sibi mutuo (accito si placet amico) dicere: calculemus." For an illuminating comment to this text, see Benzmüller (2017).

Frege could succeed, while Leibniz could not. Why? Frege's language of logic was preceded by an intense development of the linguistic practice of mathematicians. In this practice appeared individual variables, quantifiers, and higher-order formulas (e.g. in the principle of complete induction).

Due to Frege's achievements, it was possible for Hilbert and his collaborators to create a perfectly formalized language, liable to mechanization. Just with respect to such a precise language the *Entscheidungsproblem* could be stated, and Turing could address this problem in his study (1936) on computability.

As for the fates of daemons narrated in this story, they were different in the two cases. The downfall of Laplace's daemon was sealed by the achievements of modern physics, including quantum indeterminacy; and, additionally, by the computational arguments mentioned above (Rukavicka, 2014).

As for Hilbert's daemon, the story is more involved. Let us look deeper into its context and significance.

2.2. Why Hilbert's daemon had to fail?

Hilbert's key declaration on *Entscheidungsproblem* concerns solvability in terms of either "yes" or "not" – as answers to the question whether a formula of logic is valid, or whether it is satisfiable. Hilbert (1928) meant here first-order predicate logic. The quoted sentence is found in the section "The decision problem in predicate logic, and its significance", where limitation to the first order is rendered by the title of the chapter in which this section is included; it reads "The First-Order Predicate Logic" – FOL, for short.

In spite of such a limitation, it is said in part B that the solution of the decision problem has a fundamental significance for all those theories whose statements are capable of being formalized, that is, "logically derived from finitely many axioms." This condition is satisfied by all mathematical theories, and even more: by all those theories outside mathematics which can be formalized; even philosophical ones, as dreamt of by Leibniz (see footnote 8 in **2.1**), and attempted by Gödel (Benzmüller, 2013, 2015).

To appreciate the economy of linguistic means in FOL, let us notice that only four primitive logical constants suffice to express all possible formulas of FOL: these can be – as in Frege – the symbols of negation and implication, and one (arbitrary) quantifier; plus, the equality sign. The rest of the logical constants can be defined in terms of these primitives. If the set-theoretical symbol of membership (∈) is added, then in the language based on them one can express all the concepts and theorems of mathematics.

A language enjoying such great expressive power is close, in some degree to Leibniz's vision of *scientia uiversalis* in his text *De scientia universali seu calculo philosophico*. This closeness explains what Leibniz's inspiration meant for Frege; this can be seen in Frege's study (1880–1881).[9]

Hilbert, appreciating the great expressive power of Fregean logic, hoped it would suffice to grant the *deductive completeness* to arithmetic. Its axiomatization by Peano and formalization in Hilbert's manner, provided decidability of logic, should yield a procedure of mechanical checking validity of any arithmetical proof.

The adjective "deductive" in the phrase "deductive completeness" means deduction with the use of strictly formal rules, that is, rules referring only to the physical *form* of expressions, not to their meaning.[10]

Only such "physicalism" can ensure the mechanical character of deduction which would make it possible for a machine to produce algorithmic proofs. Gödel's incompleteness theorem is to the effect that some arithmetical truths cannot by proved in such a mechanical way, hence logic cannot provide a universal algorithm to prove every arithmetical truth, as expected in Hilbert's project. However, this project could be revived in the more modest and realistic form to be discussed in the next section.

[9] See in Frege (1973) where exact bibliographical data about Leibniz's text are also found.

[10] The nature of formal rules can be better understood against the contrastive background of non-formal rules of proof, referring not to linguistic forms but to mental operations. Such are found, e.g., in Descartes' treatise *Regulae ad directionem ingenii*. See https://en.wikipedia.org/wiki/Rules_for_the_Direction_of_the_Mind.

3. Towards universal logic as an infinite sequence of ever stronger machines

3.1. A computational perspective on developing logic towards ever greater deductive potential

Imagine somebody who plans to build a universal plant to produce all possible commodities which may be wanted presently and at any moment of the future. On the other hand, his colleague, in a more realistic mood, entertains another vision of universality. He will gradually exploit his resources: establishing first plants to produce what is currently needed, and then ones taking into account newly arising demands.

This parable is to reflect two approaches to logic as the universal tool of problem-solving. According to Hilbert, it was to be the classical predicate logic whose deductive potential would be sufficient to meet any problems that may arise in axiomatized formal theories, especially in mathematics. The undecidability of predicate logic, demonstrated by Turing (1936) and Church (1936), puts an end to such expectations. Let us look for an alternative.

The theoretical justification of an alternative has been given by Turing (1939) with the idea of oracles (see **5**). Conceptual insights as to the choice of theories able to function as oracles are owed to other researchers. Such choices are motivated by the quest for logical devices needed in the research in question to solve its specific problems.

Such a strategy of "piecemeal engineering" (to use Popper's phrase) is necessary in the face of Gödel's and Turing's results; in particular, Turing's (1936) discovery that there are uncomputable functions whose values cannot be found by any existing Turing machine. Facing this fact, Turing (1939) considered non-mechanical devices – *oracles* (as he called them), each of them able to find values of a certain uncomputable function.

Following the interpretation given by Newman, Hodges (2013), and Turing himself (see **5.1**), being an oracle can be understood as an ability of having insights which result in new concepts, and those in new axioms. New axioms increase the deductive potential of a theory, and thus solve problems having been hitherto unsolvable.

Let us compare this strategy and its theoretical justification with Hilbert's vision of a universal problem-solver, as quoted in **2.1**. According to Hilbert, the universal machine would be capable of solving problems in any axiomatizable theory in which logical derivation would be performed as a mechanical procedure. At the background of this failed project, Turing's alternative strategy of "piecemeal engineering", seems worth considering. Among its representatives, an eminent role is played by Christoph Benzmüller. He writes the following:

> [What this author proposes] utilises classical higher-order logic (HOL) as a unifying meta-logic in which (the syntax and semantics) of varying other logics can be explicitly modelled and flexibly combined. Off-the-shelf higher-order interactive and automated theorem provers can then be employed to reason about and within the shallowly embedded logics. This way Leibniz vision can (at least partially) be realised (Benzmüller, 2017).

Thus the decisive step towards universal logic consists in overcoming the limits of FOL and passing to higher order logics, in accordance with Gödel's (1936) statement, as quoted above (in **1.3**). Another essential move lies in absorbing modal logics, conditional logics, logics of time and space, provability logics, multivalued logics, and free logics, to name just a few examples (Benzmüller, 2017, sec. 3).

Such might be a list of prospective constituents of a universal logic, as a modern, realistic accomplishment of Leibniz's dream. However, this listing reveals a serious difficulty of the enterprise. Besides FOL, almost each item is debatable from one or another philosophical point of view. If so: what strategy should we adopt in our tending toward the universal logic, and tending as well towards its common acceptance by the world of learning?

The strategy of continuing eternal philosophical debates seems least promising. More encouraging are two other approaches, very different from each other, but in a sense complementary. To wit, (i) an appeal to common sense being expressed in our ordinary language, and (ii) arguing from computational efficiency. This twofold approach has been tried in the literature with respect to the second-order logic.

3.2. Some cases of competition on the issue of solvability between FOL and higher-order logics, and between humans and machines

A discussion leading to a greater appreciation of higher-order logics was initiated by George Boolos (1987) with an article entitled *A Curious Inference*. The inference deals with a theorem of arithmetic whose oddity consists in an ineffable difference between the length of a formalized proof in FOL and a proof in 2nd-order logic. The latter occupies ca. two pages of print, while the former – as Boolos calculated – would require more symbols than the number of elementary particles in the universe.

Commenting on that fact, Boolos remarks that the property of being a higher-order language is omnipresent in our everyday speech, without any possibility of expelling it from the ordinary language. Boolos does not dwell on examples, but it is easy to find some. Consider the statement of the following fact: "In the population of this village there are ten married couples, each having three children."

This message does not presuppose any mysterious metaphysics for which nominalists blame higher-order expressions. It is easy to paraphrase this sentence in a mixed idiom in which set-theoretical terms would be inserted into ordinary language, as in the following utterance: "In the set of classes of the given village inhabitants there is the class of ten married couples, each of them being in the parental relation to three children."

In the present discussion it is a rather auxiliary argument, of the *ad hominem* type, addressed mainly to nominalists. These, e.g. Tadeusz Kotarbiński and his followers, try to defend their position by recourse to ordinary language as representing, according to them, common sense, claiming that its grammar does not surpass the limits of the first-order language. If so, let them try to paraphrase in FOL the above-quoted sentence, in order to eliminate names of sets, as "population", "couple" "ten-element set of pairs", "three children".

From a scientific point of view, more significant is another way of testing the utility of higher-order languages. It is nicely exemplified through an experiment described by Benzmüller and Brown (2007) in their extensive report: *The Curious Inference of Boolos in Mizar and OMEGA*. Both Mizar and OMEGA are proof assistants, called also checkers. That is, computer programs devised to check the correctness of proofs in mathematics (but applicable also in other areas). The former requires proofs written in the language of set theory, the latter – of second-order logic. In either case the printout of the checked proof occupies ca. 50 pages.

It is reasonable to suppose that the difference between the second-order printout and the first-order printout is comparable with the difference between their handmade counterparts. And that, according to Boolos's calculation (concerning his case) is like that between several thousand symbols of the 2nd-order version and more than 10^{86} symbols in the 1st-order version. Boolos estimates that in the latter case there would be more symbols than the number of elementary particles in the visible universe, and that amounts to roughly 10^{86} elements.

The moral to be drawn from such speculations is the following. Attempts to use only FOL in mechanized proofs are doomed to failure like analogous attempts at using FOL in some handmade formalized proofs. The proof discussed by Boolos in its non-formalized form requires several lines, i.e., a small fraction of a page, while Andrew Wiles's (1995) non-formalized proof of Fermat's theorem (see **4**) requires much more than a hundred pages of manuscript.

This makes us aware of the enormous complexity (measured by the length) of Wiles's proof in its present non-formalized garb. Thus, we become faced with the phenomenon of the unimaginably higher complexity of the same proof, were it to be formalized according to the requirements of mechanized processing, either by a prover or by a checker.

Compare this question with the illuminating story of Boolos's (1987) "Curious Inference", as sketched in the present subsection. Boolos's case hints at the rapidly growing length (hence complexity) of a proof, when passing from a non-formalized (intuitive) to a formalized approach. Would such a complexity be tractable with the resources of computer memory and time currently available? This is a challenge to be met by competent researchers, especially those who intensely avail themselves of checkers in creating databases of formalized mathematical theories.

4. Relative solvability, algorithmic and intuitive. Morals to be drawn from the success in proving Fermat's theorem

Let us consider, as the motto of this section, the following statement.

> Formal [i.e., algorithmic] decidability is a concept relative to a given formalization of a mathematical theory, and consequently, the fact that some sentence is undecidable in a formal theory does not give any hint as to whether it is intuitively solvable (Placek, 2013, p. 47).

"Formal theory" is to be conceived as a theory suitable to be subjected to mechanization owing to a programming interface. The notion of relative solvability can be instructively illustrated through the sensational story of the career of Fermat's last theorem stated in 1637. It asserts the following.

F: No three distinct positive integers x, y, z can satisfy the equation: $x^n + y^n = z^n$, if $n > 2$.

This theorem was conjectured by Pierre de Fermat in the margin of a copy of Diophantus' *Arithmetica*; he claimed he had a proof that was too large to fit in the margin (where Fermat used to record his comments). In fact, the finding of a demonstration proved so difficult that in the succeeding centuries, up to the year 1995 in which Andrew Wiles published the solution, great mathematical minds were not able to solve the problem, in spite of intense efforts. Now, when we are fully aware of the historical circumstances, some objective reasons for these failures can be explained.

Wiles's proof resorts to algebraic geometry and number theory in their results and methods so sophisticated that they were not available either to Fermat himself or to the next generations of mathematicians, up to the late 20th century. When one distinguishes the content of mathematics in the 17th and 20th centuries, it becomes evident that solvability must be relative to a certain state of this science. Fermat's problem was insolvable with respect to the mathematics of that former period, and solvable with respect to the latter. This is true in a most general sense of "solvability", covering its intuitive and its formal, or algorithmic, varieties.

When stating the *Entscheidungsproblem* (see **2.1**), Hilbert thought of an algorithmic solvability. To wit, the kind realized in a formalized proof liable to be mechanically (automatically) checked or mechanically produced. This interpretation of solvability is confirmed in part B of the decision problem, where Hilbert assigns the attribute of so-interpreted solvability only to "those theories whose statements are capable of being logically derived from finitely many axioms", hence those which are axiomatized and formalized; "logical derivability" in the sense of logic developed by Hilbert, amounts to formalization of proofs.

These ascertainments lead to the question: what kind of solvability characterizes Wiles's solution of Fermat's problem? Certainly it is relative to the state of mathematics in the nineties of the 20th century. Previously the problem was not likely to be solved, even by the most gifted mathematicians, for the lack of relevant concepts and theorems. Has the solution nowadays obtained any chance to be classified as algorithmic? To answer this question, one should realize the size of Wiles's (1995) proof: much more than 100 pages.[11]

There would be two possible ways of getting an answer as to the chance of algorithmic solvability: by the use of a checker or of a prover. Either would require obtaining unimaginably sophisticated software, the next step after giving the proof in question a formalized structure. This would require a vast library, in which all mathematical theories relevant to the proof would be found in a formalized form.[12]

[11] To gain a more professional knowledge about Wiles's result, the Reader is advised to consult the following Internet sources. 1) "The proof of Fermat's Last Theorem" – a fully professional textbook by prof. Nigel Boston (Department of Mathematics University of Wisconsin – Madison); 2) "Wiles's proof of Fermat's Last Theorem" – a much more popular and much shorter article in Wikipedia.

[12] An example of such a device is Mizar Mathematical Library – MML – fruitfully explored by mathematicians in various academic communities. This Library contained in 2017 almost 6000 articles, that is, formalized proofs concerning 36 mathematical theories, submitted by almost 300 authors from 18 countries. The Library is described in much detail in Bancerek et al. (2018).

5. From conceptual insights to formal proofs. Turing's O-machines and Gödel's idea of the inexhaustibility of mathematics

5.1. Insights, formalized proofs, algorithms, and mechanized proofs. Their mutual relations

The results of Gödel and Turing are complementary to each other with respect to the issue: how do creative intuitions give rise to mechanized formal proofs? Turing (1939) proposed a schema of an ordered sequence of ever stronger problem-solving machines, where each increase of algorithmic efficiency is due to a non-mechanical factor – called by him an "oracle". Any "ordinary" Turing machine equipped with Oracle is called an *O-machine*.

Commentators on this conception understand the activity of oracles as acts of mathematical intuition. Or, maybe, it should be rather said "philosophical intuitions concerning mathematical objects".

Gödel emphasises the role of philosophical intuition in mathematics, when claiming that the discovery of the incompleteness of number theory was due to his Platonic vision of objectivity and inexhaustibility (infiniteness of the domain) of mathematics.

Turing gives us a formal schema of ever stronger machines ordered in an infinite sequence, and does not pretend to state whether the human mind's cognitive abilities also allow proceeding in infinity; or maybe, at some point they would be too weak to attack the next, still more complex, problem.

Gödel is more optimistic in his hope that the frontiers of such a process might be pushed further and further by humans, also in difficult philosophical issues. He believed that many so-called philosophical problems are, in fact, scientific problems, only not yet examined by scientists.

He even tried to exemplify this claim, sketching a formal proof of Anselm's ontological argument for God's existence, so giving it a scientific form. After Gödel's death, this proof turned out capable of obtaining ever more precise form, owing to Dana Scott and other eminent logicians, up to the phase in which it has become possible to be processed by computer.

In that final phase, the project required mastering such sophisticated logical and computational measures as higher-order modal logics, and a combination of most efficient provers (Benzmüller, 2013, 2015). There is still another achievement in automating the ontological proof. It consists in controlling the correctness of the human handmade formalization, by using a program of the type *checker*, called also *proof assistant*. Such an approach was successfully adopted within the framework of analytic tableaux by Melvin Fitting (2002).[13]

Thus, a step has been taken towards realizing Gödel's idea, central to his optimistic rationalism, that is, his belief that people are able to perceive concepts more and more clearly, not only in mathematics but also in fundamental philosophy. For instance, the notion of most Perfect Being, conceived by Anselm in his ontological argument was becoming clearer and clearer in the successive reflections by Descartes, Leibniz, and Kant, up to Gödel, who was able to give it a strict logical form in an advanced logic.

Thus, it has been shown, at least in one question, that even in philosophy there can exist a way from insight to proof, not only formalized, but even computational. "Computational" means the highest degree of exactness and clarity, since every flaw will be detected by machine.

It ought to be noticed that it may also work the other way around. Not only from creative insights to formalized proof, but also from such proofs to new insights. Those, again, may push the frontiers forth, up to the next level of mechanization.

Benzmüller and Paleo (2013) remark that the exorbitant requirements imposed by automated procedures of problem-solving force the use of unusual logical means, e.g., some debatable systems of modal logic; otherwise the proof would not end with the conclusion we wish to get. This obliges us to reconsider the content of intuitions which motivate the logical system we use. Such a reflection may lead either to revising or to deepening these intuitions.

What Gödel and his followers did, formalizing the ontological proof, belongs to the discipline called *formal ontology*. What some of his followers did, those who devised provers or proof-assistants, can be called *computational ontology*. Such a discipline is being born before

[13] It would be impossible to list all relevant logical publication on formalizing ontological argument. A representative selection (ca. 40 items) is found in the Wikipedia entry "Gödel's ontological proof".

our eyes. This will, hopefully, open new perspectives on the issue of problem-solving with the united forced of creative insights and mechanical routines.

5.2. Oracles as non-mechanical devices to aid machines in solving problems which otherwise would remain unsolvable

There is a deep interconnection between what we call "computation" and "deduction". Each deductive step in a formalized system, that is, each move made by a problem-solving machine, is a kind of computation. In the case of deduction, this means computing the value of the consequence function. Hence, the question arises: is it possible to supplement a machine with uncomputable deductive steps? Such uncomputable steps in reasoning would be what we call "insights" or "acts of intuition".

Considering this question, Turing introduced the definition of an "oracle" which can supply, on demand, the answer to the halting problem for every Turing machine. Turing seems to have given this concept an interpretation in terms of a mathematician's "intuition" in theorem-proving. In fact, M. H. Newman in a biographical memoir on Turing identified the uncomputable "oracle" with intuition. This seems to go too far, as the "oracle" is capable of doing more than any human being. Nevertheless, Newman had a unique status as Turing's collaborator at this period and must have reflected the tenor of Turing's considerations. In any case, Turing in his definition of an oracle makes it clear that it enables one to see the truth of a formally unprovable Gödel statement.

The mentioned definition is contained in the passage opening Turing's article (1939). It runs as follows:[14]

> The well known theorem of Gödel shows that every system of logic is in a certain sense incomplete, but at the same time it indicates means whereby from a system L of logic a more complete system L' may be obtained. By repeating the process we get a sequence $L, L_1 = L', L_2 = L'_1, L_3 = L'_2, \ldots$ of logics each more complete than the preceding.

[14] Here it is quoted from the text of Turing's (1938) Ph.D. dissertation (1938), published in 1939. See URL: http://www.dcc.fc.up.pt/~acm/turing-phd.pdf.

To make this idea as accessible as would be needed by one for whom it would be unexpected, I avail myself of the notion of *essential extension*, opposite to what is known in logic as inessential extension. The latter is defined by Tarski, Mostowski, and Robinson (1968, p. 11) by two conditions concerning a relation between formal theories. The one relevant to the present issue, is the following: "An extension T_2 of T_1 is called *inessential*, if every valid sentence of T_2 is derivable in T_2 from a set of valid sentences of T_1. [...] If T_1 is axiomatic, then an inessential extension of T_1 is obtained by adding some new individual constants, but without adding any new non-logical axioms."

When understanding "essential" as "not inessential", we derive from the above text the following definition concerning axiomatic theories (just such ones as are considered in the context of mechanical problem-solving issues).

Axioms of a theory, besides their role of being first premises in proving theorems, perform the role of meaning postulates to define the content of concepts which occur in them, e.g. the concepts of zero and sequence in the axioms of arithmetic (see Definition 5.3 in Marciszewski [1981]). Note that in the process of creating a theory, such concepts are prior to axioms; only owing to the idea of zero conceived once upon a time, did it become possible for Peano to state his axioms. Such a process that leads to creating new axioms is worthy of being named *creative conceptualization* (cp. **0.1**).

If new logical axioms are added to the theory T_1, thus forming the theory T_2, then the latter is an *essential extension* of the former. Thus, all problems solvable in T_1 are also solvable in T_2, but not the other way round.

This terminological acquisition makes it easy to give a concise interpretation of Turing's passage in the above textbox. To wit, that a system L' is closer to being complete than a system L, simply means that L' is an essential extension of L. The phrase "more complete" is to recall that e.g. the second-order arithmetic is closer to being complete than the first-order arithmetic, while the fully complete one is like the inaccessible limit of a sequence (Gödel, 1931, 1936).

Now it is easy to explain the role of an oracle. It is a means to advise such an essential extension of a theory, which is needed to solve the problem in question. As to the nature of the oracle, Turing does not go any further than saying that it cannot be a machine. With the help of the oracle we could form a new kind of machine, called an O-machine, having as one of its fundamental processes that of solving number theoretic problems unsolvable by ordinary Turing machines (Turing, 1938, p. 13).

Where do such insights come from? That is the question. Anyway, to be or not to be of scientific progress depends on the situations in which an oracle, that is, an enlightening insight, causes that a problem hitherto unsolvable, becomes solvable in a new and deeper perspective. From such insights are born also problem-solving machines, and those, in turn, assist us in getting new insights.

To incite a critical debate on the issue of intuition, I append a classical statement of mechanism due to Ludwig Wittgenstein as the author of *Tractatus Logico-Philosophicus*. In this way, those who oppose mentalism from the angle of mechanism win an opportunity to exactly define their mechanistic stance. Is it akin to that of Wittgenstein, or rather distanced from the philosophy of his *Tractatus*?

6. Wittgenstein's semantics and ontology: maxims on language and reality

6.1 Limits of my language mean the limits of my world

This means that all I know is what I have words for. Hence, what I cannot speak about, I must pass over in silence. It is a saying characteristic of Wittgenstein's semantical landscape. How famous it has become is witnessed by the dozens of its occurrences quoted in the German original, and almost 300 000 000 (!) in English translations (according to Google). In the original the maxim reads as follows:

5.6. Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.

It is a view drastically inconsistent with whatever we know about language, mind and reality. We know that each mute animal has its own world consisting of what it perceives in the environment. We know that a very small boy acquires a native language in the process of perceiving some things, e.g., a black cat, and asking a parent: what is it? After listening to an answer, the child acquires the expression "black cat" which did not exist in his vocabulary before asking about the name. We also know that a discoverer of a new object or phenomenon, hitherto not known to anybody, proposes a name for it after the discovery, not before.

It is hard to believe that a great thinker could have thought something as counter-evident as the maxim in question. When looking for a broader context to explain the riddle, we find the following:

> 6.5. For an answer which cannot be expressed, the question too cannot be expressed. The riddle does not exist. If a question can be put at all, then it can also be answered.[15]

The riddle does not exist? Just a moment before, I felt it a riddle that in *Tractatus*, besides attractive and convincing ideas, sometimes appear such counterfactual views as item 5.6. Might the same author display so little sensitivity to such counterfactual evidence?

The answer may come by scrutinizing the words "can" and "cannot". There is impossibility, so to say, accidental, and another one – principal; the former removable after taking some steps, the latter insuperable. My riddle concerning Wittgenstein's insensitivity to some counterexamples is, I hope, just accidental.

As for the principal impossibility of answering, the paradigmatic cases were found, according to Wittgenstein, like the Vienna Circle, in metaphysics. Metaphysical issues were called by them *Scheinprobleme*, that is *pseudo problems*, having no chance to be solved by serious research. Such "riddles", they claimed, could not appear either in science or in scientific philosophy.

Suppose I am a neopositivist in the Wittgensteinian or the Vienna Circle style. Then in my language no answers to a pseudoproblem can be given because in a rigid language (the only I can accept) its rules do not admit concepts which are metaphysical, such as those of God, souls, universals, and even numbers, etc. – in accordance with item 6.5. Hence such notions do not belong to my language, being beyond the limits of my scientifically admissible world – according to maxim 5.6. Thus, that renowned maxim, freed from counterexamples appearing in ordinary language, refers to an ideal scientific language created according to that neopositivistic design.

[15] These claims are worth quoting in the original wording too: "Zu einer Antwort, die man nicht aussprechen kann, kann man auch die Frage nicht aussprechen. Das Rätsel gibt es nicht. Wenn sich eine Frage überhaupt stellen läst, so kann sie auch beantworten warden."

In the twenties of the past century, such a stance belonged to the mainstream of European philosophy. It embraced, as the fundamental principle, the belief in the decidability of logic and mathematics, that is, the *mechanical* (i.e., algorithmic) *solvability* of any problem arising in these and related disciplines. This conviction was undermined only in the thirties with the results of Gödel (1931), Turing (1936), and Church (1936).

Its clear-cut formulation by Wittgenstein is found in some passages which (in slightly differing wording) appear at several places in *Tractatus*.

> Our fundamental principle is that every question which can be decided at all by logic can be decided off-hand. [...] It is possible [...] to give at the outset a description of all "true" logical propositions. Hence there have never be surprises in logic. [...] Proof in logic is only a mechanical expedient to facilitate the recognition of tautology.[16]

This declaration sheds an additional light on the connection between limits of the world and those of our language. It is assumed that a right language should be based on the universal schema of predicate logic in which the whole mathematics, and related sciences, can be adequately expressed. As for logic (we read in the quoted passage) each problem is solvable in it with a *mechanical expedient*. The same is the case for mathematics because of the fact that the whole of mathematics is expressible in the language of logic. Solvability "off-hand" does not necessarily mean a quick solution, but that attainable in a finite number of steps (as said in the definition of algorithm), while "mechanical" means that no creative insight is needed.

Moreover, it is in order to note, according to the neopositivistic project of unified science that: (i) all sciences should be mathematized (ii) arguments in empirical sciences also will have mechanical (algorithmic) form, owing to the special *logic of induction* planned for the use of empirical sciences. In fact, so far this plan has not been realized, and even, as argued by Karl Popper, has no chance to succeed (1959).

Nevertheless, were this great project to succeed, Wittgenstein would be right in his claim: "for an answer which cannot be expressed,

[16] See in *Tractatus*: 5.551; see also 6.125, 6.1251, 6.1262; this item is interestingly pointed by Kneale (1962, p. 729); "never" italicized by Wittgenstein, "mechanical" underlined by W. M.

the question too cannot be expressed" since (in the paradigm of neo-positivism) the only right way of expression in sciences is in the algorithmized language of logic. Solely in terms of such a language it is possible to solve (algorithmically) any scientific problem. Hence, each problem is bound to be stated in the same terms in which one states its solution. In this sense, the solution can be expressed then and only then when the answer can be expressed.

This is the cornerstone of Wittgenstein's philosophy of language, mind and reality, as well as his philosophy of science. This foundation has been undermined at the most sensitive point, the belief in the decidability of logic and mathematics. This is the story told in the next section.

6.2. Wittgensteinian maxims in the context of logical atomism and of finitism

The term *logical atomism* is due to Bertrand Russell. However, it can be safely used as the name of Wittgenstein's doctrine too. He and Russell agreed that in the main features their philosophical views were concordant. This is why Russell so heartily welcomed Wittgenstein's *Tractatus* and preceded its edition (Wittgenstein, 1922) with an extensive and sympathetic introduction.

Logical atomism holds that the world consists of ultimate logical *facts, or atoms*, which cannot be broken down any further. It is often referred to as "Picture theory" for the tenet that the world is faithfully pictured by our language with the exactness 1:1 (one-to-one relationship). A map cannot consist of an infinite number of elements, hence the mapped world has to be a finite reality.

Let us consider implications of that approach for the issue of problem-solving. If one has such an ideal site map in which every detail of the site is mapped, then every question of how to get around in the terrain can be answered with the help of the map alone. Having been acquainted with the signs on the map, we are directly related to the corresponding objects in the terrain in question.

According to logical atomism, the right scientific language, describing a set of empirical facts connected by logical relations, supplies us with such an ideal map of reality. Thus, on the basis of the trustworthy mapping of the world by a properly constructed language, any problems concerning the world are *solvable* just with resort to the *logical analysis of language*. Since the only properly constructed language is that of classical propositional logic and predicate logic. This is why Russell's and Wittgenstein's atomism is honoured with the adjective "logical".

The above characterization of logical atomism, entailing the finiteness of the world, as well as the full cognitive availability of empirical facts and logical laws, leads to the conclusion that every scientific problem can be solved in a finite number of steps on the basis of the hitherto gained knowledge.

What is true about the above assertions is the fact that each of them is satisfied when it comes to the language of the propositional logic and its semantics. It is a language so closed that no new concept could enlarge the resources of its logical constants, beyond the combinatorially obtained number of twenty symbols. Thus, the limits of the language determine the limits of a conceptual apparatus concerning the references of logical constants which form the totality of the propositional domain ("world").

As for the item 6.5, the first and the third sentence amount to saying that if a question can be expressed, the answer can be expressed too. This is perfectly right about the language of propositional logic. Wittgenstein was convinced that the same has to be right about the language of whole logic, including the predicate calculus. However, this conviction has been refuted by Turing's and Church's sophisticated proofs of undecidability of that more advanced part of logic.

There is no chance to present here these highly technical arguments, but we can take advantage of a rough exemplification. Consider the following formula **CF** whose validity would be tested according to relevant rules of eliminating logical constants; to wit, rules belonging to the system of analytic tableaux.

CF: $\forall x \exists y (y > x) \Rightarrow \exists y \forall x (y > x)$ (CF stands for *curious formula*)

The structure of this formula causes that in the course of checking whether its denial (non-CF) does not lead to contradiction, our rules generate here the necessity of constantly repeated returns to the starting point. This process is carried out according to an invariably the same, perceived intuitively, principle of generating loops. Thus, after observing a number of steadily recurring loops we become certain of their inevitability which means that the process will never come to a halt. Thus, we solve in an intuitive way some case of the halting problem that in no case is solvable by Turing machine.

Thus, it is impossible to prove that non-CF leads to contradiction, i.e. to prove that CF is a tautology, that is, a logical truth. Shorter: the formula CF is unprovable.

Let's now take into account that, as Gödel (1930) has shown, the first-order predicate logic is complete. This means that whenever a formula is logically true, then it is provable. Hence, if it is not provable (as is CF), then it is no logical truth. So we have come to solve in an intuitive way a problem that is not mechanically solvable in the formalized language of logic.

Hence, contrary to Wittgenstein's stance, we come to the paradoxical conclusion that there are riddles which cannot be solved mechanically in an algorithmic language, but can be solved by an intellectual insight expressible in ordinary language. Were this point challenged by a defender of mechanism, such a rejoinder would be welcome as an encouragement to futher scrutiny.

REFERENCES

Ajdukiewicz, K (1934). Sprache und Sinn. *Erkenntnis*, *4*(1), 100–138.

Bancerek, G., et al. (2018). The Role of the Mizar Mathematical Library for Interactive Proof Development in Mizar. *Journal of Automated Reasoning, 61*(1–4), 9–32.

Benzmüller, C. E., Brown, C. E. (2007). The Curious Inference of Boolos in Mizar and OMEGA. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, *23*, 299–386.

Benzmüller, C., Woltzenlogel Paleo, B. (2013). Gödel's God on the computer. Retrieved from: http://page.mi.fu-berlin.de/cbenzmueller/papers/W50.pdf

Benzmüller, C. (2015). Gödel's Ontological Argument Revisited. Findings from a Computer-Supported Analysis. In: R. S. Silvestre, J. Y. Béziau (Eds.), *Handbook of the 1st World Congress on Logic and Religion*. Joao Pessoa, Brazil.

Benzmüller, C. (2017). Universal Reasoning, Rational Argumentation and Human--Machine Interaction". *arXiv*, retrieved from: https://arxiv.org/pdf/1703.09620.pdf

Boston, N. (2003). The proof of Fermat's Last Theorem, retrieved from: https://www.math.wisc.edu/~boston/847.html

Braselmann, P., Koepke P. (2005). Gödel's Completeness Theorem. *Formalized Mathematics*, *13*(1), 49–53.

Boolos, G. (1987). A Curious Inference. *Journal of Philosophical Logic*, *16*(1), 1–12.

Buss, S. R. (1994). On Gödel's Theorems on Lengths of Proofs I: Number of Lines and Speedup for Arithmetic. *Journal of Symbolic Logic*, *59*(3), 737–756.

Church, A. (1936). An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory. *American Journal of Mathematics*, *58*(2), 345–363.

Fitting, M. (1975). *Types, Tableaus, and Gödel's God*. Dordrecht: Kluwer.

Fodor, J. A. (1975). *The Language of Thought*. Cambridge (Mass.): Harvard University Press.

Frege, G. (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle: Nebert.

Frege, G. (1880–1881). Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift. In: L. Kreiser (Ed.), *Schriften zur Logik. Aus dem Nachlass mit einer Einleitung von Lothar Kreiser* (172–226). Berlin: Akademie Verlag.

Frege, G. (1973). *Schriften zur Logik Aus dem Nachlass mit einer Einleitung von Lothar Kreiser*. Berlin: Akademie Verlag.

Fraenkel, A. A. (1976). *Abstract Set Theory*. Amsterdam: North Holland.

Gödel, K. (1930). Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, 349–360. *Monatshefte für Mathematik*, *37*(1). English translation: The completeness of the axioms of the functional calculus of logic. In: S. Feferman et al. (Eds.), *Kurt Gödel Collected Works. Vol I. Publications 1929–1936* (pp. 61–101). Oxford: Oxford University Press.

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, *38*(1), 173–198.

Gödel, K. (1936). Über die Länge von Beweisen. *Ergeb. Math. Kolloquiums*, *7*, 23–24.

Gödel, K. (1995). Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications. In: S. Feferman (Ed.), *Collected Works: Volume III: Unpublished Essays and Lectures of Kurt Gödel* (pp. 304–323). Oxford: Oxford University Press.

Grzegorczyk, A. (1974). *An Outline of Mathematical Logic. Fundamental Results and Notions Explained with All Details*. Warszawa: PWN.

Hilbert, D., Ackermann, W. (1928). *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin: Springer.

Hodges, A. (2013). Alan Turing, retrieved from: https://plato.stanford.edu/archives/fall2017/entries/turing/Kneale, W., Kneale, M. (1962). *The Development of Logic*, Oxford: Clarendon Press.

Laplace, P. S. (1951). A Philosophical Essay on Probabilities. New York: Dover Publications.

Marciszewski, W. (Ed.). (1981). *Dictionary of Logic as Applied in the Study of Language. Concepts, Methods, Theories*. Hague, Nijhoff.

Marciszewski, W., Murawski, R. (1995). *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective*. Amsterdam: Rodopi.

Marciszewski, W. (2006). The Gödelian Speed-up and Other Strategies to Address Decidability and Tractability. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, *22*, 9–29.

Mares, E. D. (2004). *Relevant Logic: A Philosophical Interpretation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Parsons, C. (2010). Gödel and Philosophical Idealism. *Philosophia Mathematica*, *18*(2), 166–192.

Placek, T. (2013). *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity: A Critical Exposition of Arguments for Intuitionism*. Berlin: Springer Science & Business Media.

Popper, K. (1959). *The Logic of Scientific Discovery*. New York, Basic Books.

Rukavicka, J. (2014). Rejection of Laplace's Demon. *The American Mathematical Monthly*, *121*(6).

Tarski, A., Mostowski, A., Robinson, R. (1968). *Undecidable Theories*. Amsterdam: North Holland.

Turing, A. (1936). On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *s2-42*(1), 230–265.

Turing, A. (1938). *Systems of Logic Based on Ordinals*. Retrieved from: http://www.dcc.fc.up.pt/~acm/turing-phd.pdf

Turing, A. (1939). Systems of Logic Based on Ordinals. Proceedings of the London Mathematical Society, *s2-24*(1), 161–228.

Webb, J. C. (1980). *Mechanism, Mentalism, and Metamathematics*. Dordrecht, Reidel.

Wiles, A. (1995). Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics*, *141*(3), 443–551.

Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus Logico-Philosophicus*. London: Routledge & Kegan Paul.

NOTY O AUTORACH

THOMAS BEDÜRFTIG, prof. dr, Universität Hannover, Institut für Didaktik der Mathematik und Physik, AG Didaktik der Mathematik, Welfengarten 1, 30167 Hannover.

GABRIELA BESLER, dr hab., adiunkt UŚ, Instytut Filozofii, Wydział Nauk Społecznych, ul. Bankowa 11, 40-007 Katowice. ORCID: 0000-0002-1843-5198.

MICHAEL HELLER, prof. dr hab., Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych, ul. Szczepańska 1/5, 31-011 Kraków & Papieski Uniwersytet Jana Pawła II, Wydział Filozoficzny, ul. Kanonicza 9, 31-011 Kraków. ORCID: 0000-0003-1462-6808.

STANISŁAW KRAJEWSKI, prof. dr hab., prof. UW, Instytut Filozofii, Wydział Filozofii i Socjologii, Krakowskie Przedmieście 3, 00-927 Warszawa. ORCID: 0000-0002-1142-8112.

WITOLD MARCISZEWSKI, prof. dr hab., prof. em. UwB, Katedra Logiki, Informatyki i Filozofii Nauki, Plac Uniwersytecki 1, 15-420 Białystok & Fundacja na rzecz Informatyki, Logiki i Matematyki, ul. Krochmalna 3, 00-864 Warszawa. ORCID: 0000-0003-3384-5782.

ROMAN MURAWSKI, prof. dr hab., prof. UAM, Zakład Logiki Matematycznej, Wydział Matematyki i Informatyki, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań. ORCID: 0000-0002-2392-4869.

MARCIN PORĘBA, dr hab., prof. UW, Instytut Filozofii, Wydział Filozofii i Socjologii, Krakowskie Przedmieście 3, 00-927 Warszawa. ORCID: 0000-0002-8843-0894.

PAWEŁ STACEWICZ, dr. inż, adiunkt PW, Wydział Administracji i Nauk Społecznych, Plac Politechniki 1, 00-661 Warszawa. ORCID: 0000-0003-2500-4086.

KRZYSZTOF WÓJTOWICZ, prof. dr hab., prof. UW, Instytut Filozofii, Wydział Filozofii i Socjologii, Krakowskie Przedmieście 3, 00-927 Warszawa. ORCID: 0000-0002-1187-8762.

STUDIA SEMIOTYCZNE

Tom XXXII • Numer 2 • 2018

W numerze:

ISSN 0137-6608
e-ISSN 2544-073X